

# 基于小波阈值密度的自适应重要抽样方法<sup>1)</sup>

戴鸿哲<sup>2)</sup> 薛国峰 王伟

(哈尔滨工业大学土木工程学院, 哈尔滨 150090)

(结构工程灾变与控制教育部重点实验室(哈尔滨工业大学), 哈尔滨 150090)

**摘要** 提出了一种基于小波阈值密度估计的结构可靠性分析高效自适应重要抽样方法. 该方法利用非线性小波收缩方法对结构失效域样本进行密度估计, 并以此作为重要抽样密度进行可靠性分析. 与传统基于核密度估计的重要抽样方法比, 由于非线性小波阈值密度估计具有较好局部适应性和最优收敛速度, 且克服了核密度估计中计算精度严重依赖于参数选择的缺陷, 因此以较少的预抽样样本就能获得与传统方法相当的精度, 有效提高计算效率. 数值算例表明所提方法对工程中常遇到的多设计点及噪音功能函数可靠性问题具有良好适应性.

**关键词** 结构可靠性, 重要抽样, 小波阈值密度, 核密度, 马尔可夫链模拟

中图分类号: TB114, TU311 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-303

## 引言

在结构可靠度理论中, 常采用重要抽样方法求解结构失效概率  $P_f$

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^d} I[g(\mathbf{x}) \leq 0] \frac{f(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_d \quad (1)$$

式中,  $f(\mathbf{x})$  为随机变量  $\mathbf{x}$  的联合概率密度,  $I(A)$  为  $A$  的示性函数,  $g(\mathbf{x}) \leq 0$  表示结构失效,  $h(\mathbf{x})$  为重要抽样密度函数<sup>[1-2]</sup>.  $P_f$  的无偏估计为

$$\hat{P}_f = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M I[g(\mathbf{v}_j) \leq 0] \frac{f(\mathbf{v}_j)}{h(\mathbf{v}_j)} \quad (2)$$

式中, 样本  $\mathbf{v}_j$  按  $h(\mathbf{x})$  抽取,  $M$  为抽样次数. 通常  $h(\mathbf{x})$  的选取极大地影响重要抽样的计算效率, 当其取为

$$h_{\text{opt}}(\mathbf{x}) = I[g(\mathbf{x}) \leq 0] f(\mathbf{x}) / P_f \quad (3)$$

模拟效率最高, 因此式 (3) 又被称为最优抽样密度函数. 然而由于  $P_f$  未知, 式 (3) 是无法预先得到的, 为此人们发展了非参数密度估计方法构造最优抽样密度. 这类方法首先对失效域进行预抽样获得失效域样本, 再拟合这些样本的分布密度作为重要抽样函数. 例如, Ang 等<sup>[3]</sup> 最早采用蒙特卡罗抽样获得失效域样本, 然后利用核密度估计构造最优抽样密度进行求解; Au 等<sup>[4]</sup> 采用马尔可夫链模拟生成失效域样

本, 而后用自适应核密度估计构造重要抽样密度; Kurtz 等<sup>[5]</sup> 利用 Kullback-Leibler 交叉熵并结合有限混合密度构造重要抽样函数进行分析; 袁修开等<sup>[6]</sup> 采用基于核密度估计的重要抽样求解可靠性灵敏度. 不难看出现有方法多是依赖于经典核密度或混合密度估计构造抽样密度, 而核函数和窗口宽度的选择会极大影响方法精度<sup>[7]</sup>. 近年来随着小波理论的发展, 人们意识到其是一种具有较好局部适应性和渐进性质的非参数密度估计方法, 且在总体逼近效果上优于核密度估计<sup>[8-9]</sup>. 因此本文提出一种基于小波阈值密度估计的自适应重要抽样方法, 其基本思路是首先采用马氏链模拟结构失效域样本, 再利用非线性小波阈值密度估计构造重要抽样函数, 最终进行重要抽样求解. 数值算例表明本文方法可有效提高现有方法的计算精度和效率.

## 1 非线性小波阈值密度估计

令  $\phi(\mathbf{x})$  和  $\varphi(\mathbf{x})$  分别为尺度函数和小波函数, 则函数集合  $\{\phi_{j_0, \mathbf{k}}(\mathbf{x}), \varphi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) \mid j \geq j_0, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的一组标准正交基<sup>[10]</sup>, 其中

$$\left. \begin{aligned} \phi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= 2^{j/2} \phi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) \\ \varphi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= 2^{j/2} \varphi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

因此对任意函数  $f \in L^2(\mathbb{R})$  有

2013-11-18 收到第 1 稿, 2013-12-10 收到修改稿.

1) 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20122302110058).

2) 戴鸿哲, 副教授, 主要研究方向: 结构随机振动、随机有限元及结构可靠性理论. E-mail: hzdai@hit.edu.cn

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{j_0, \mathbf{k}} \phi_{j_0, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} d_{j, \mathbf{k}} \varphi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

其中  $c_{j, \mathbf{k}}$  和  $d_{j, \mathbf{k}}$  分别为尺度和小波系数. 利用上式即可对取自密度  $f$  的独立同分布样本  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  进行密度估计, 其中  $c_{j, \mathbf{k}}$  和  $d_{j, \mathbf{k}}$  的无偏估计为

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_{j, \mathbf{k}} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \phi_{j, \mathbf{k}}(X_i) \\ \hat{d}_{j, \mathbf{k}} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \varphi_{j, \mathbf{k}}(X_i) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

进而概率密度  $f$  的估计为

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{j_0, \mathbf{k}} \phi_{j_0, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j_0}^{j_1} \sum_{\mathbf{k}} \hat{d}_{j, \mathbf{k}} \varphi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

进一步采用阈值收缩方法即可建立如下非线性小波阈值密度估计<sup>[11]</sup>

$$\hat{f}^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{j_0, \mathbf{k}}^* \phi_{j_0, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j_0}^{j_1} \sum_{\mathbf{k}} \hat{d}_{j, \mathbf{k}}^* \varphi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

式中  $\hat{d}_{j, \mathbf{k}}^*$  表示对小波系数进行阈值运算, 并可取如下软阈值函数

$$d_{j, \mathbf{k}}^* = \text{sign}(\hat{d}_{j, \mathbf{k}}) (\hat{d}_{j, \mathbf{k}} - \lambda)_+ \quad (9)$$

其中  $\mathbf{x}_+ = \max(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ , 阈值  $\lambda$  按下式计算<sup>[9]</sup>

$$\lambda = (0.6 \sim 0.8) \max_{j, \mathbf{k}} |\hat{d}_{j, \mathbf{k}}| \quad (10)$$

对多维问题, 需采用一元小波的张量积构建多元小波函数, 多元尺度函数和小波函数定义为

$$\left. \begin{aligned} \phi(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \prod_{i=1}^d \phi_{(i)}(x_i) \\ \varphi^{(l)}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \prod_{i=1}^d \xi_{(i)}^{(l)}(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $\xi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$  或  $\varphi(\mathbf{x})$  但不全为  $\phi(\mathbf{x})$ ,  $d$  为维数. 类似式 (5), 任意多元函数  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$  可表示为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{\mathbf{k}} c_{j_0, \mathbf{k}} \phi_{j_0, \mathbf{k}}(x_1, x_2, \dots, x_d) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{l=1}^{2^d-1} d_{j, \mathbf{k}}^{(l)} \varphi_{j, \mathbf{k}}^{(l)}(x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (12)$$

其中  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ , 且

$$\left. \begin{aligned} \phi_{j_0, \mathbf{k}}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= 2^{jd/2} \prod_{i=1}^d \phi_{(i)}(2^j x_i - k_i) \\ \varphi_{j_0, \mathbf{k}}^{(l)}(x_1, x_2, \dots, x_d) &= 2^{jd/2} \prod_{i=1}^d \xi_{(i)}^{(l)}(2^j x_i - k_i) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这样, 多元函数小波概率密度估计的表达式为

$$\hat{f}(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{j_0, \mathbf{k}} \phi_{j_0, \mathbf{k}}(\mathbf{X}) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{l=1}^{2^d-1} \hat{d}_{j, \mathbf{k}}^{(l)} \varphi_{j, \mathbf{k}}^{(l)}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

其中,  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为取自具有密度  $f$  的  $\mathbf{X}$  的样本, 尺度系数和小波系数按下式估计

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_{j, \mathbf{k}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j, \mathbf{k}}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{jd/2} \prod_{m=1}^d \phi_{(m)}(2^j X_i - k_m) \\ \hat{d}_{j, \mathbf{k}}^{(l)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_{j, \mathbf{k}}^{(l)}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{jd/2} \prod_{m=1}^d \xi_{(m)}^{(l)}(2^j X_i - k_m) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

相应地亦可对系数  $\hat{d}_{j, \mathbf{k}}^{(l)}$  进行类似于式 (9) 的阈值收缩得到非线性估计, 高维小波密度估计的适用计算方法可详见文献 [12].

## 2 基于小波阈值密度的自适应重要抽样方法

### 2.1 马尔可夫链模拟失效域样本

自适应重要抽样方法的第一步就是模拟结构失效域中的条件样本点. 本文采用 Metropolis 算法生成样本点, 其原理详见文献 [4]. 首先定义目标分布  $\pi(\cdot)$  为最优抽样密度, 选择失效域内任意一点作为马氏链的初始状态  $\mathbf{x}_t$ , 并根据建议分布  $q(\cdot | t)$  生成  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}$  做为马氏链下一时刻状态点  $\mathbf{x}_{t+1}$  的概率为

$$\alpha(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mathbf{y})q(\mathbf{x}_t | \mathbf{y})}{\pi(\mathbf{x}_t)q(\mathbf{y} | \mathbf{x}_t)} \right\} \quad (16)$$

如果  $\mathbf{y}$  不被接受则马氏链不转移. 重复上述步骤直至生成  $N$  个马氏链状态点, 随着点数增加, 模拟样本的概率分布逐渐趋于最优重要抽样密度, 即构成了服从概率密度为  $h_{\text{opt}}(\mathbf{x})$  的结构失效域样本.

### 2.2 小波阈值密度构造重要抽样函数

一旦获得服从最优抽样密度的结构失效域样本, 即可利用非线性小波阈值密度估计方法构造重要抽样密度. 这包括确定式 (14) 中的  $j_1$  和  $\mathbf{k}$  的值, 其中  $j_1$  可由密度  $f$  的尺度图确定<sup>[13]</sup>

$$\prod_{f(j)} = \sum_{\mathbf{k}} \left| \langle f, \varphi_{j, \mathbf{k}} \rangle \right|^2 \quad (17)$$

该尺度图描述了密度  $f$  在不同尺度  $j$  的能量分布, 从  $j_0$  开始, 可用经验尺度图

$$\prod(j) = \sum_{l=1}^{2^d-1} \sum_{\mathbf{k}} \left| \hat{d}_{j, \mathbf{k}}^{(l)} \right|^2 \quad (18)$$

来确定, 其方法为当相邻两尺度密度函数的能量分布呈指数增长时, 较小的尺度即为  $j_1$ . 此外本文采用消失矩为  $n$  的 Daubechies 小波, 若样本给定在范围  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$  内, 则尺度函数  $\phi_{j,k}$  和小波函数  $\varphi_{j,k}$  中  $k$  值的范围分别为

$$\lfloor a_i 2^j \rfloor - 2N + 1 \leq k_i \leq \lfloor b_i 2^j \rfloor \quad (19)$$

$$\lfloor a_i 2^j \rfloor - N \leq k_i \leq \lfloor b_i 2^j \rfloor + N + 1 \quad (20)$$

其中  $\lfloor a_i 2^j \rfloor$  表示不超过  $a_i 2^j$  的最大整数,  $\lceil a_i 2^j \rceil$  表示大于或等于  $a_i 2^j$  的最小整数.

### 2.3 基于小波阈值密度自适应重要抽样的结构可靠性分析方法

基于小波阈值密度自适应重要抽样的结构可靠性分析方法求解步骤为:

(1) 采用 2.1 节中 Metropolis 算法模拟目标分布为最优抽样密度的失效域样本  $\{x_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ ;

(2) 对生成的失效域样本, 采用非线性小波阈值密度估计式 (14) 构造重要抽样密度函数, 并应用 2.2 节方法计算上述密度在任意点上的取值;

(3) 生成  $M$  个服从第 (2) 步所构造的重要抽样密度函数样本, 利用式 (2) 进行重要抽样估计  $P_f$ .

由于结构分析的计算成本远高于可靠性分析本身, 因此应以所调用的结构分析次数作为计算效率的评价标准. 本文方法第 1 步生成  $N$  个失效域样本, 第 3 步进行  $M$  次重要抽样, 总的结构分析次数为  $N_T = N + M$ , 因此其计算效率主要由  $N_T$  值决定.

### 3 算例分析

本节采用算例验证本文方法的计算精度和效率. 所有算例采用消失矩为 4 的 Daubechies 小波进行密度估计, 结果与基于核密度估计重要抽样方法进行比较, 核密度参数的选择采用文献 [4] 中方法.

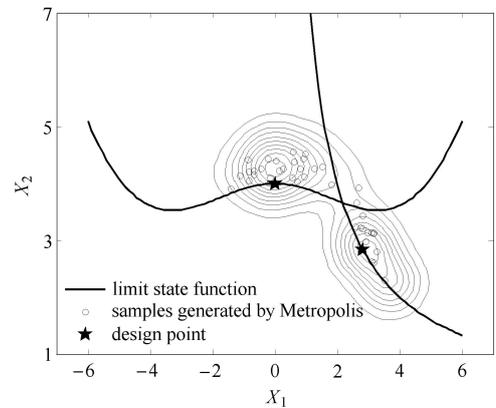
**算例 1** 串联系统结构极限状态函数为 [4,14]

$$g(\mathbf{x}) = \min \left\{ 3 - X_2 + \exp \left( -\frac{X_1^2}{10} \right) + \left( \frac{X_1}{5} \right)^4, \quad 8 - X_1 X_2 \right\}$$

其中, 随机变量  $X_i$  服从标准正态分布, 该系统有两个设计点 (0, 4) 和 (2.83, 2.83), 该算例可以检验方法对多设计点问题的适用性.

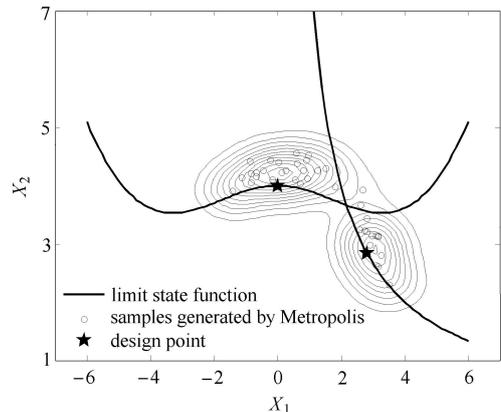
图 1 给出了采用 Metropolis 算法生成的 300 个结构失效域样本和分别采用非线性小波阈值密度估计和核密度估计方法构造的最优抽样密度的等高线. 可以看出 2 种方法构造的重要抽样密度都能够自适

应地集中在两个不同的设计点附近, 反映结构失效的重要区域, 说明小波阈值密度估计至少可替代核密度估计用于自适应重要抽样. 由于所构造的小波阈值密度在形状上类似最优抽样密度, 因此可以处理具有任意复杂形状失效边界问题, 且无需对每个极限状态寻找设计点而降低方法的效率.



(a) 核抽样密度

(a) Kernel sampling density



(b) 小波抽样密度

(b) Wavelet sampling density

图 1 算例 1 中的重要抽样密度

Fig. 1 Importance sampling density for example 1

表 1 给出了两种方法在相同  $N_T$  值下的计算结果. 可以看出本文方法计算精度较高, 其原因一方面在于非线性小波阈值密度估计具有极好的灵活性和自适应性, 另一方面也在于核密度估计中参数的选择对计算结果有一定影响. 为进一步比较两种方法的计算效率, 表 2 给出了  $M$  值固定、不同  $N$  值下的计算结果. 可以看出本文方法的精度总是高于传统方法, 尤其在失效域样本较少的情况下更加明显, 这主要归功于非线性小波密度估计较快的收敛速度.

随着失效域样本数目的增加, 核密度方法的计算精度也逐渐改善, 说明核密度估计对预抽样样本数目要求较高, 造成方法计算效率下降.

表 1 算例 1 可靠度计算结果

Table 1 Reliability results of example 1

Methods	No. samples	$P_f$	Error/%
Monte Carlo	$10^6$	$6.81 \times 10^{-5}$	—
wavelet	$N = 300, M = 500$	$7.41 \times 10^{-5}$	8.81
kernel	$N = 300, M = 500$	$7.74 \times 10^{-5}$	13.66

表 2 不同  $N$  值下可靠度计算结果

Table 2 Reliability results for different choices of  $N$

No. samples	Wavelet-based IS		Kernel-based IS	
	$P_f$	error/%	$P_f$	error/%
$N = 100, M = 500$	$5.39 \times 10^{-5}$	20.85	$8.55 \times 10^{-5}$	25.55
$N = 200, M = 500$	$5.94 \times 10^{-5}$	12.78	$5.48 \times 10^{-5}$	19.53
$N = 300, M = 500$	$7.41 \times 10^{-5}$	8.81	$7.74 \times 10^{-5}$	13.66
$N = 400, M = 500$	$7.26 \times 10^{-5}$	6.61	$7.60 \times 10^{-5}$	11.60
$N = 500, M = 500$	$7.19 \times 10^{-5}$	5.58	$6.24 \times 10^{-5}$	8.37

算例 2 为研究噪音极限状态下方法的稳定性, 选取结构功能函数如下 [5]

$$g(\mathbf{x}) = b - X_2 - \kappa(X_1 - e)^2 + 0.001 \sum_{i=1}^2 \sin(100X_i)$$

其中  $X_i$  服从标准正态分布, 参数  $b, \kappa$  和  $e$  为确定值分别取 5, 0.5 和 0.1. 该极限状态对应两个设计点且噪音项使得解析方法很难准确搜寻到设计点.

表 3 给出 2 种方法在相同  $N_T$  值下的计算结果. 可以看出本文方法对噪声的影响不敏感, 其误差约为传统方法的一半, 表明了非线性阈值规则对数据压缩和局部降噪所起到的作用. 表 4 给出了在  $N_T = 500$  不同  $N$  和  $M$  组合时 2 种方法的计算结果. 可以看出, 本文方法的计算精度基本总是高于传统方法, 尤其是在失效样本数量较少的情况下更是如此, 说明小波阈值估计在提高方法计算效率上存在的优势. 值得注意的是即使构造的抽样密度符合最优抽样函数, 过少的重要抽样样本仍会降低方法的精度, 因此在同样计算量下应平衡  $N$  和  $M$  取值.

表 3 算例 2 可靠度计算结果

Table 3 Reliability results of example 2

Methods	No. samples	$P_f$	Error/%
Monte Carlo	$3.6 \times 10^5$	$3.07 \times 10^{-3}$	—
wavelet	$N = 500, M = 500$	$3.33 \times 10^{-3}$	8.47
kernel	$N = 500, M = 500$	$2.51 \times 10^{-3}$	18.24

表 4 相同  $N_T$  值下可靠度计算结果

Table 4 Reliability results for different choices of  $N$  and  $M$

No. samples	Wavelet-based IS		Kernel-based IS	
	$P_f$	error/%	$P_f$	error/%
$N = 100, M = 400$	$3.96 \times 10^{-3}$	28.99	$4.46 \times 10^{-3}$	45.82
$N = 200, M = 300$	$3.83 \times 10^{-3}$	24.76	$1.98 \times 10^{-3}$	35.55
$N = 300, M = 200$	$2.44 \times 10^{-3}$	20.52	$2.06 \times 10^{-3}$	32.90
$N = 400, M = 100$	$1.87 \times 10^{-3}$	39.09	$4.12 \times 10^{-3}$	34.20

## 4 结论

本文基于非线性小波阈值密度估计, 提出了一种高效的结构可靠性分析自适应重要抽样方法. 由于小波阈值密度估计具有良好的局部适应性和最优的收敛速度, 且其性能受初始参数选择的影响较小, 因此与传统的基于核密度估计的自适应重要抽样方法相比, 本文方法能够有效减少可靠性分析中所需的结构分析次数并保证良好的精度, 从而提高计算效率. 算例结果表明本文方法具有理想的精度和较高的计算效率, 在工程上将具有广泛的应用价值.

## 参 考 文 献

- Balesdent M, Morio J, Marzat J. Kriging-based adaptive importance sampling algorithms for rare event estimation. *Structural Safety*, 2013, 44: 1-10
- Yuan XK, Lu ZZ, Zhou CC, et al. A novel adaptive importance sampling algorithm based on Markov chain and low-discrepancy sequence. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 29: 253-261
- Ang GL, Ang AH-S, Tang WH. Optimal importance-sampling density estimator. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 1992, 118: 1146-1163
- Au SK, Beck JL. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, 1999, 21: 135-158
- Kurtz N, Song JH. Cross-entropy-based adaptive importance sampling using Gaussian mixture. *Structural Safety*, 2013, 42: 35-44
- 袁修开, 吕震宙, 池巧君. 基于核密度估计的自适应重要抽样. 西北工业大学学报, 2008, 26(3): 297-302 (Yuan Xiukai, Lü Zhenzhou, Chi Qiaojun. Achieving efficient estimation of reliability sensitivity of a multi-model system without requiring knowledge of design point. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2008, 26(3): 297-302 (in Chinese))
- Silverman BW. Density Estimation for Statistic and Data Analysis. London New York: Chapman and Hall, 1986
- Hardle W, Kerkyacharian G, Picard D. Wavelets, Approximation and Statistical Application. Berlin-Paris: Chapman and Hall, 1997
- Walter GG, Shen XP. Wavelets and Other Orthogonal Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994
- Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$ . *Transactions of American Mathematics Society*, 1989, 315: 69-87

- 11 Donobo DL, Johnstane IM, Kerkyacharian G, et al. Density estimation by wavelet thresholding. *Annual Statistics*, 1996, 24: 508-539
- 12 Tribouley K. Practical estimation of multivariate densities using wavelet methods. *Statistica Neerlandica*, 1995, 49: 41-62
- 13 Pinheiro A, Vidakovic B. Estimating the Square Root of a Density Via Compactly Supported Wavelets. ISDS, Duke University, 1995
- 14 Dubourg V, Sudret B, Deheeger F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 33: 47-57

(责任编辑: 刘希国)

## A WAVELET THRESHOLDING DENSITY-BASED ADAPTIVE IMPORTANCE SAMPLING METHOD<sup>1)</sup>

Dai Hongzhe<sup>2)</sup> Xue Guofeng Wang Wei

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

(Key Lab of Structures Dynamic Behavior and Control (Harbin Institute of Technology), Ministry of Education, Harbin 150090, China)

**Abstract** This study develops an efficient adaptive importance sampling method based on nonlinear wavelet thresholding for reliability analysis. In the proposed method, the pre-sampling samples, which fall in the failure region, are used to estimate the density via the nonlinear wavelet thresholding estimator, and the density obtained is applied as the near-optimal sampling density to implement the importance sampling. Compared with the kernel density estimator, the nonlinear wavelet thresholding density estimator has a high degree of flexibility in terms of convergence rate and smoothness, moreover, the choice of the initial parameters slightly affects the accuracy of the method. Therefore, the proposed method can achieve comparable accuracy with fewer pre-sampling samples and improve the computational efficiency of the traditional method. Numerical examples show that the proposed method is applicable for wide-range reliability problems with multi-design points or noisy limit state functions.

**Key words** structural reliability, importance sampling, wavelet thresholding density, kernel density, Markov chain simulation

---

Received 18 November 2013, revised 10 December 2013.

1) The project was supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20122302110058).

2) Dai Hongzhe, associate professor, research interests: random vibration, stochastic finite element and reliability theory. E-mail: hzdai@hit.edu.cn