

受周期和白噪声激励的分段线性系统的吸引域与离出问题研究¹⁾

孔琛 刘先斌²⁾

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘要 离出行为是随机非线性系统的重要现象之一, 而离出问题是除随机动力系统理论以外考察随机非线性系统随机稳定性的另一种重要的方法. 分段线性系统是一个经典的非线性动力学模型, 受随机激励后成为随机系统, 但并不是严格的随机动力系统, 因而此时随机动力系统理论也不适用. 为了研究同时受周期和白噪声激励的分段线性系统, 首先使用 Poincaré 截面模拟其在无噪声时确定性的动力学行为, 然后使用 Monte Carlo 模拟对其在白噪声激励下的离出行为进行了数值仿真分析. 其次, 为了考察离出问题中的重要参数, 系统的平均首次通过时间 (mean first-passage time, MFPT), 使用 van der Pol 变换, 随机平均法, 奇异摄动法和射线方法进行了量化计算. 通过对理论结果与模拟结果的对比分析, 得到结论: 当系统吸引子对应的吸引域边界出现碎片化时, 理论结果与模拟结果的误差极大; 而当吸引域边界足够光滑的以后, 理论结果与模拟结果才会相当吻合.

关键词 分段线性系统, 离出问题, 平均首次通过时间

中图分类号: O324 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-300

引言

离出问题 (exit problem) 旨在研究微噪声扰动下的动力系统的随机动力学行为. 对于一个非线性的随机系统, 在有限的时间内, 系统具有从初始稳定状态转变到另一个不同的稳定状态的可能性, 而这种现象被称为离出现象. 自然地, 系统的平均首次通过时间 (mean first-passage time, MFPT) 就成为衡量离出行为的重要指标之一. 离出问题的研究在振动系统可靠性分析, 化学反应率分析以及量子力学的“隧穿效应”分析中都具有重要的地位. 一般地, 随机扰动总是对系统的长期行为有着重要的影响, 不论噪声的强度多小, 不论系统是否处于概率 1 意义的稳定平衡状态, 只要经过充分长的时间, 系统轨线的离出都可能成为一个必然的事实^[1](相对于小概率事件而言).

近几十年来, 人们一直在努力尝试将这种现象解释清楚. 与随机动力系统理论旨在研究概率 1 意义下, 当样本轨线具有对时间的指数变化率的条件

下, 随机动力系统的动力学特征不同, 离出问题的研究难点在于它旨在考察非线性随机系统的样本轨线在具有对时间的非指数变化率的条件下, 系统动力学行为, 而这又常常会伴随着系统的强非线性. 此时在随机动力学系统中很成熟的概念, 诸如, 刻画系统概率 1 稳定性和概率 1 分岔的最大 Lyapunov 指数、D-分岔等均不再使适用. 此外, 局部分析方法, 尤其是局部线性化的手段通常不适用于离出问题, 因为离出问题往往伴随着系统的全局稳定性分析.

20 世纪 40 年代, Kramers 研究了郎之万方程的离出问题, 给出了系统的平均首次通过时间, 得到了一个广泛接受的结论

$$\langle \tau \rangle \sim \exp(\Delta U/D) \quad (1)$$

其中 $\langle \tau \rangle$ 为平均首次通过时间, ΔU 为势垒高度, D 为噪声强度. 部分地解决了郎之万方程的离出问题. 1967 年 Ventsel 和 Freidlin 建立了“大偏差理论”(large deviation theory, LDT)^[2], 并与奇异摄动法得到的结果完全一致^[3], 都可以得到一般系统平均首次通过

2013-09-16 收到第 1 稿, 2013-12-09 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11072107, 91016022, 11232007)、机械结构力学及控制国家重点实验室 (南京航空航天大学) 自主研究课题 (0113G01) 和江苏高校优势学科建设工程资助项目.

2) 刘先斌, 教授, 主要研究方向: 动力学与控制, 随机分岔, 随机动力学, 随机振动. E-mail: xbliu@nuaa.edu.cn

时间的理论公式,但由于受限于计算手段而没有得到具体的计算结果.1975年 Ludwig^[4]使用了适用于计算高维偏微分方程又结果精确的射线方法:使用特征线理论将偏微分方程在每条射线之上化为一组常微分方程来求解,这为计算平均首次通过时间提供了基础.之后, Schuss 和 Matkowsky 等使用奇异摄动法对离出问题进行了深入的分析研究,对平均首次通过时间和离出点分布都做出了严格的理论分析^[5-6],并考虑了 FPK 方程的内部解,即吸引边界对解所产生的边界层效应^[7],明确了系统在边界层附近的动力学行为,弥补了 Kramers 解的不足与矛盾之处^[7-8].20世纪90年代以后, Roy 结合使用了奇异摄动法和射线方法计算了平均首次通过时间,并与 Monte Carlo 模拟结果进行比较,得到了很好的结果^[9-11].近年来, Zhu 及其合作者们使用其他的计算方法——随机平均法、隐式有限差分法等方法,针对离出问题做了很多的工作^[22-26].尤其是针对高维 Hamilton 系统使用以上方法计算了条件可靠性函数、首次通过时间的条件矩等系统定量属性,得到了很多有意义的结果.

在文献 [12-13] 中, Roy 对一段线性系统做了详细的模拟分析,并使用射线方法计算了系统的稳态概率密度,但是没有得到最终结果(系统的平均首次通过时间),得到的势垒高度值 ΔU 也与模拟结果有很大的偏离.本文在此基础上做了进一步的分析,计算了系统在另一外激励频率下的平均首次通过时间,得到了较好的结果,并通过考察系统在不同外激励频率下的相图解释了为什么出现这种偏离.首先,通过模拟系统在一个频率段上的 Poincaré 截面上稳定不动点及其吸引域的发展情况,明确系统的确定性动力学行为.还计算了不同频率外激励下的系统对白噪声的不同响应,得到 ΔU 的估计值.随后使用 van der Pol 变换和随机平均法对系统的 1 周期解做了近似和平均化处理.通过选择两个对应典型相图的频率点,计算了系统的平均首次通过时间,得到了较文献 [13] 更丰富的结果.最后比较了两组结果以及约化后系统和原系统的结果的不同之处,得到结论:当频率点对应的吸引域相图边界光滑时才能得到相对较好的结果,如果对应的吸引域边界碎片化时则得到的结果相对较差.

1 数值模拟分段线性系统

分段线性系统在工程上常用于模拟齿轮间的空

隙、弹性制动等情况,对其响应的研究在工程上有着很重要的意义.分段线性系统中还可以观察到丰富的非线性系统特有的动力学行为^[9].也正是由于其动力学行为的复杂性,在研究离出行为之前,先要明确系统的确定性行为,包括系统的吸引子,吸引域以及分岔情况.下面给出系统的运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + f(x) = F(t) \quad (2)$$

其中 $f(x)$ 为分段线性项

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases} \quad (3)$$

外激励项 $F(t)$ 包含周期激励和噪声激励

$$F(t) = f_0 + f_1 \cos(\omega t) + \xi(t) \quad (4)$$

$\xi(t)$ 为自相关函数为 $2D\delta(t)$ 的零均值高斯白噪声.

利用系统分段线性的特点,可以分别在 $x < -1, -1 \leq x \leq 1, x > 1$ 区间中得到系统的含参数解.假设在 t 时刻有 $x(t) = x_t, \dot{x}(t) = y_t$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时有

$$x(t + \Delta t; t, x_t, y_t) = \left(\frac{c_1}{2\zeta}\right)e^{-2\zeta\Delta t} + \frac{c_0}{2\zeta} + \frac{(f_0 + \xi_k)t}{2\zeta} + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (5)$$

ξ_k 是一个新的离散状态的随机过程,是 $\xi(t)$ 在时间段 $[t = k\Delta t, t' = (k+1)\Delta t]$ 的均方极限意义下的积分平均

$$\xi_k = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\tau, \quad \Delta t \ll 1 \quad (6)$$

易知对于确定的 k , ξ_k 是满足零均值且方差为 $\frac{2D}{\Delta t}$ 的高斯分布的随机变量.式 (5) 中的系数有

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{-f_1}{\omega^2 + 4\zeta^2}, \quad b = \frac{-2\zeta a}{\omega} \\ c_1 &= -y_t + \frac{f_0 + \xi_k}{2\zeta} - a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t) \\ c_0 &= 2\zeta x_t + y_t - (f_0 + \xi_k)\left(t + \frac{1}{2\zeta}\right) - \\ &\quad a[2\zeta \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)] - \\ &\quad b[2\zeta \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当 $x < -1, x > 1$ 时有

$$x(t + \Delta t; t, x_t, y_t) = \gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t) + \kappa + e^{-\zeta\Delta t} [\alpha \cos(\omega_d \Delta t) + \beta \sin(\omega_d \Delta t)] \quad (8)$$

其中, $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega$ 为自然频率, 其他系数有

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{f_1(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2} \\ \delta &= \frac{2f_1\zeta\omega}{(1 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2} \\ \kappa &= f_0 + \xi_k \mp 1 \\ \alpha &= x_t - \kappa - \gamma \cos(\omega t) - \delta \sin(\omega t) \\ \beta &= \frac{1}{\omega_d} [y_t + \zeta\alpha + \gamma\omega \sin(\omega t) - \delta\omega \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

给定初值 $(x(0), y(0))$ 后, 可以利用数值的方法通过式 (5) 和式 (8) ($\xi = 0$) 得到系统的完整解, 当 $t \rightarrow \infty$ 时得到系统的稳态解.

这里只考虑周期激励的频率对系统响应产生的影响, 以后均给定 $\zeta = 0.01, f_0 = f_1 = 0.25$. 利用 Poincaré 截面

$$\Sigma_{t_0} = \left\{ (x, y, t) \mid t = t_0, \text{ mod } \frac{2\pi}{\omega} \right\} \quad (10)$$

模拟得到 $0.65 < \omega < 0.9$ 的确定性系统 (即 $\xi = 0$) 的稳定解的分布与分岔行为.

在图 1 中, 为了区别这 2 个稳定解, 称 x 方向幅值较大的 1 周期解为共振解 (resonant solution), x 方向幅值较小的 1 周期解为非共振解 (non-resonant solution). 从图中可以清楚地看到在这个频率段中共共振解一直存在, 并且 x 方向幅值随着频率增长而变大, 非共振解约是从 $\omega = 0.68$ 附近由鞍节点分岔而出现, 同时在 Poincaré 截面上也会出现一个鞍点. 下面对离出行为的研究会远离这个分岔点, 因为接近分岔点时, 稳定吸引子和鞍点的距离很近, 这时的动力学行为往往会很复杂.

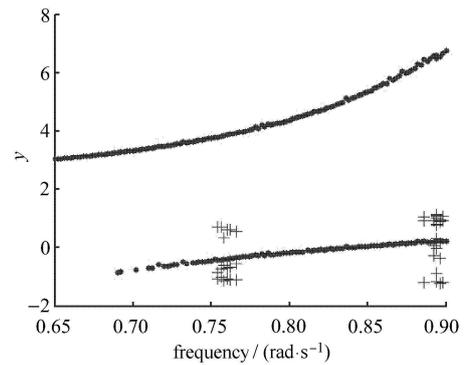


图 1 系统 (2) 的分岔图像

“*”代表 1 周期解, “+”代表 3 周期解

Fig. 1 A bifurcation diagram of system (2)

“*” for period-1 solutions, “+” for period-3 solutions

在 $\omega = 0.89$ 附近还出现了一些稳定的 3 周期解, 但是还需要确定这些 3 周期解在 Poincaré 截面上的具体位置, 以判断是否会影响对 1 周期解的分析. 同时还希望观察非共振解的吸引域是如何随着外激励频率的变化而变化的. 吸引域的大小也可以直观地了解非共振解对噪声的敏感程度. 同样利用式 (5) 和式 (8) ($\xi = 0$), 得到非共振解在 Poincaré 截面上的吸引域的分布变化.

图 2 中可以看到随着 ω 的增大, 非共振解的吸引域在慢慢地变大, 边界变完整、光滑. 并在图 2(f) 中明显出现了 3 个空洞, 结合图 1 中在 $\omega = 0.90$ 附近出现 3 周期解的事实可以知道, 当 $\omega = 0.90$ 时在吸引子附近分岔出现了稳定的 3 周期解. 说明图 1 中 $\omega = 0.89$ 附近的一些 3 周期解并不是出现在 1 周期非共振解附近, 因此不会影响对 1 周期解的分析. 直到 $\omega = 0.90$ 时在非共振解吸引域的内部分岔出现的 3 周期解才会影响对 1 周期解的分析, 所以后面的分析会以 $\omega = 0.90$ 为频率上限. 还可以从吸引域的大

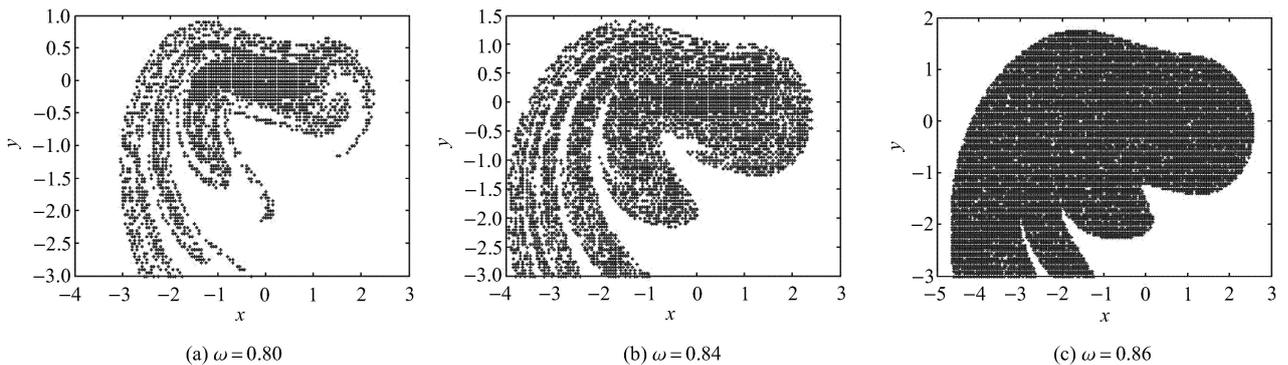


图 2 非共振解在 Poincaré 截面上的吸引域随外激励频率的变化

Fig. 2 The attracting region of non-resonant solution on Poincaré with different values of ω

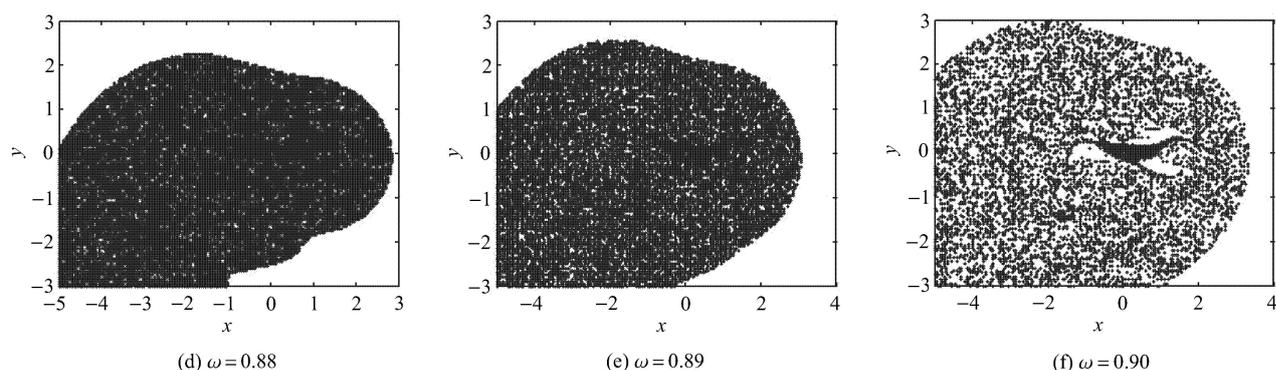


图2 非共振解在 Poincaré 截面上的吸引域随外激励频率的变化 (续)

Fig. 2 The attracting region of non-resonant solution on Poincaré with different values of ω (continued)

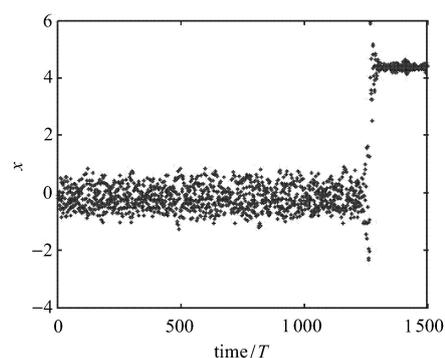
小可以直观的看出, 非共振解对噪声的敏感程度应该会不断下降, 平均首次通过时间应该会不断变大.

下面在系统 (2) 中引入高斯白噪声 $\xi(t)$. 已经知道, 不论噪声强度有多小, 经过足够长的时间, 系统总会从所在的稳定状态离出到另一个稳定状态, 甚至是不稳定的混沌半吸引子 [12-13], 利用式 (5) 和式 (8), 可以很容易地模拟这种现象. 这里只考虑 $0.65 < \omega < 0.9$ 时存在两个稳定解的情况下发生的离出现象. 在这个范围内, 选择 $\omega = 0.80, 0.89$ 两个比较典型的情况做详细的分析. $\omega = 0.80$ 时, 非共振吸引子的吸引域初具规模, 但是边界仍然是碎片化的; $\omega = 0.89$ 时, 非共振吸引子的吸引域完整、光滑, 而且还没有出现分岔现象.

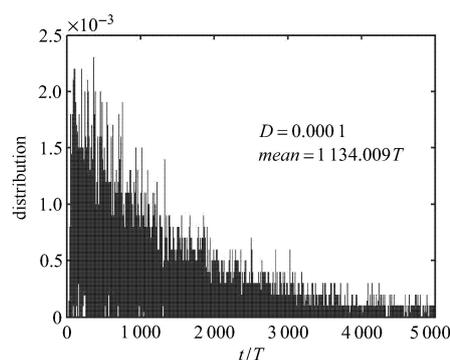
先考察 $\omega = 0.8$ 的情况, 当取 $D = 0.0001$ 的小噪声的情况下就可以很容易地看到系统从非共振稳定解离出到共振稳定解的现象. 对这样的多个样本做统计平均就可以得到噪声激励下非共振解的平均首次通过时间, 见图 3.

图 3 中 T 指外激励周期, 即 $2\pi/\omega$. 图 3(a) 为离出时间历程图, 图中横坐标是以周期 T 为单位计数的时间, 纵坐标为受扰动解在 Poincaré 截面上的位置的 x 坐标. 图 3(b) 为 10000 个离出信号样本的离出时刻统计分布图, 图中横坐标是以周期 T 为单位计数的离出时刻的时间, 纵坐标为离出时刻的概率值, 得到非共振解的平均首次通过时间 $\langle \tau \rangle = 1134T$. 由式 (1) 可以近似地推算得到非共振解离出的势垒高度 $\Delta U_{NR} \approx 2.9 \times 10^{-4}$, 这个数值可以用来验证后面的理论解是否合理.

从共振解离出到非共振解的现象则需要更大的噪声强度 D , 又会使离出后的解很快再离出回到共振解, 所以这个现象并不容易捕捉. 这里不讨论这种



(a)



(b)

图3 $\omega = 0.80, D = 0.0001$ 非共振解离出时间历程与首次离出时间分布Fig. 3 The time history of exiting from non-resonant solution and the distribution of first-exit time with $\omega = 0.80, D = 0.0001$

情况, 只是指出当 $D > 0.02$ 时, 共振解的离出时间达到 $10^5 T$ 数量级.

对于 $\omega = 0.89$ 的情况, 随着吸引域的增大, 非共振解对噪声的敏感程度减小 (图 2), 所以在这种情况下需要更大的噪声才能观察到非共振解的离出现象. 取 $D = 0.0065$ 时, 噪声强度是前面情况的 65 倍, 而

平均首次通过时间与前面的相当, 用同样的方法得到与图 3 相似的离出时间历程与离出时间的分布, 并得到平均首次通过时间 $\langle \tau \rangle = 1.218T$, 由式 (1) 同样可以近似得到 $\omega = 0.89$ 时的非共振解的势能高度 $\Delta U_{NR} \approx 4.5 \times 10^{-2}$. 这个值相比较上面的情况要大出很多, 说明较前面的情况更稳定了.

至此, 对系统 (2) 的研究仅仅局限于数值模拟部分, 后面要对这些现象做出理论上的分析与预测. Schuss 和 Matkowsky 及其合作者们使用奇异摄动法做了相当多的工作, 得到了很多重要的结论 [5-8,14-18], 被后人广泛引用. 这里需要注意的是这些理论分析针对的只是平面自治系统的不动点离出, 而且吸引边界是如图 2(e) 所示的光滑边界, 而没有讨论过如图 2(a) 所示的碎片化边界的情况. 这也是在前面做了如此多的模拟去观察系统吸引域的原因: 希望能找到适合理论应用的状态并且尝试处理更复杂的状态.

由于这里遇到的是极限环的离出行为, 不方便处理, 所以需要使用近似方法转化, 将极限环转化为某些相图上的不动点以方便后续处理. 一般使用的近似方法有 van der Pol 变换或者“能量-相角”变换 (详见文献 [19-20]), 将极限环的离出行为转化为 van der Pol 相图或者“能量-相角”相图上的不动点的离出行为来考虑, 前者使用的较多, 后者有较好的近似度, 但是对分段线性系统会丢失掉某些非共振解. 也有一些学者直接考虑极限环的离出行为的, 如文献 [21], 但是并没有被广泛使用. 下面就使用 van der Pol 变换对系统进行近似简化处理, 之后在 van der Pol 变量下使用随机平均法.

2 简化系统

由于系统 (2) 是平面非自治系统, 先对 1 周期解采用 van der Pol 变换式 (11) 近似地转化到 van der Pol 相图. 再使用平均法消去时间维度, 变成平面自治系统来研究.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(\omega t) + b(t) \sin(\omega t) + c(t) = \\ & r(t) \cos(\omega t - \phi(t)) + c(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t) = -a(t)\omega \sin(\omega t) + b(t)\omega \cos(\omega t) = \\ & -r(t)\omega \sin(\omega t - \phi(t)) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, $a(t), b(t), r(t), \phi(t)$ 均认为是慢变量, 并且忽略 $\dot{c}(t)$. 系统 (2) 的非线性项 $f(x)$ 可以使用傅里叶展开

为

$$f(c + r \cos \theta) = cN_0(c, r) + rN_1(c, r) \cos \theta + \dots \quad (12)$$

其中 $\theta = \omega t - \phi$, N_0, N_1 如下

$$\left. \begin{aligned} N_0(c, r) &= 1 + \frac{r}{2c} \left[G\left(\frac{1-c}{r}\right) - G\left(\frac{-1-c}{r}\right) \right] \\ N_1(c, r) &= 1 - \frac{1}{2} \left[H\left(\frac{1-c}{r}\right) - H\left(\frac{-1-c}{r}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}), & |x| \leq 1 \\ |x|, & |x| > 1 \end{cases} \\ H(x) &= \begin{cases} -1, & x < -1 \\ \frac{2}{\pi}(\sin^{-1} x + x \sqrt{1-x^2}), & |x| \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (11) ~ 式 (14) 代入式 (2), 整理后针对 θ 平均化, 可以得到 van der Pol 相图 $(a(t), b(t))$ 下自治系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}(t) &= A(a, b, c) + \varepsilon W_1(a, b) + \sqrt{\varepsilon} \xi_1(t) = \\ & -\zeta a + \frac{N_1 b}{2\omega} - \frac{b\omega}{2} - \varepsilon \frac{a}{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{\varepsilon} \xi_1(t) \\ \dot{b}(t) &= B(a, b, c) + \varepsilon W_2(a, b) + \sqrt{\varepsilon} \xi_2(t) = \\ & \frac{\omega a}{2} - b\zeta - \frac{aN_1}{2\omega} + \frac{f_1}{2\omega} - \varepsilon \frac{b}{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{\varepsilon} \xi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中, $\varepsilon = \frac{D}{\omega^2}$, $\xi_1(t), \xi_2(t)$ 为相互独立的高斯白噪声随机过程, $\langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta(\tau), i = 1, 2$ 为它们的自相关函数. $c(t)$ 的控制方程可以由 $\dot{c}(t)$ 针对 θ 平均化等于 0 的条件得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{x}(t) + \omega^2 r \cos \theta) d\theta = 0 \quad (16)$$

上式代入式 (2) 并忽略噪声项可以得到控制 $c(t)$ 的代数方程

$$cN_0 = f_0 \quad (17)$$

这样, 式 (15) 这两个 Itô 意义下的随机微分方程和代数方程 (17) 在一起完全决定了系统 (2) 在 van der Pol 相图上的动力学行为. 容易知道 van der Pol 相图上的不动点通过式 (11) 对应了原系统 (2) 的一个 1 周期解. 通过数值计算可以很容易求到平均化以后系统 (15), (17) 的平衡点位置以及 $0.65 < \omega < 0.9$ 频率段的幅频特性曲线, 见图 4.

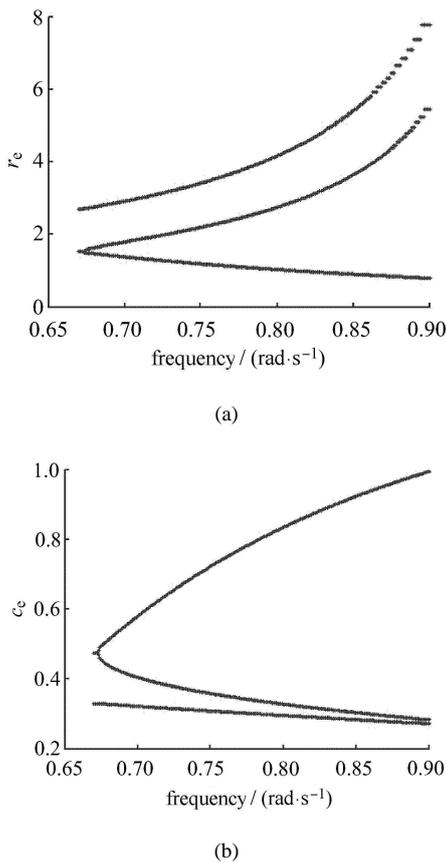


图 4 平均化系统 (15), (17) 的幅频特性曲线, $r_e - \omega$, $c_e - \omega$
 Fig. 4 Frequency response plots r_e and c_e versus forcing frequency ω

图 4 中间的一支解曲线为不稳定解, 上下两侧的两支解为稳定解. 与图 1 比较可知式 (15) 与式 (2) 有相似的动力学行为, 它们在几乎同一位置分岔, 产生两个稳定解和一个不稳定解, 说明前面做的近似与平均化处理是可接受的. 下面就以约化后的系统 (15),(17) 研究分段线性系统 (2) 的离出行为.

3 计算平均首次通过时间

文献 [7] 中对离出问题的两个重要的特征量: 平均首次通过时间和离出点分布做了细致的分析. 设 x, y 为吸引域 D_o 中的点, S_y 为吸引边界 ∂D_o 上的微线段, 则从 x 点离出到边界的平均首次通过时间 $\langle \tau(x) \rangle$ 有 (详细地推导见文献 [7])

$$\langle \tau(x) \rangle = \frac{\int_{D_o} p(x, y) dy}{\int_{\partial D_o} J(x, y) \cdot \nu(y) dS_y} \quad (18)$$

其中 $p(x, y)$ 为满足吸引边界条件 (19) 和初始条件 (20) 的 FPK 方程的解. $J(x, y)$ 为 $p(x, y)$ 对应的概率流密度向量 (21), 式中 a_i, b_{ij} 为 FPK 方程中的第一、

第二导数矩, 满足重复下标求和约定. $\nu(y)$ 为 ∂D_o 的外法线方向.

$$p(x, y)|_{x \in D_o, y \in \partial D_o} = 0 \quad (19)$$

$$p(x, y) = \delta(y - x) \quad (20)$$

$$J_i(x, y) = a_i p - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij} p) \quad (21)$$

由式 (15) 可以很容易得到 a_i, b_{ij} 的形式

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A + \varepsilon W_1, & a_2 &= B + \varepsilon W_2 \\ b_{11} &= b_{22} = \varepsilon = \frac{D}{\omega^2}, & b_{12} &= b_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式 (18) 的物理意义十分明显, 分母的积分表示吸引域 D_o 内所有轨线首次离出总时间之和, 分子的积分表示到达边界 ∂D_o 的所有轨线的数目和, 这样式 (18) 就可以很自然地理解为平均首次通过时间.

通过式 (18), 平均首次通过时间的计算就归结为求解满足式 (19) 和式 (20) 的 FPK 方程的解. 而由于系统和边界条件的复杂性, 几乎不可能求到满足式 (19) 和式 (20) 的 FPK 方程的解析解, 即使是数值解也很困难. 文献 [7] 中分析了满足式 (19) 和式 (20) 的 FPK 方程的解的构成式 (23), 可以由此入手简化方程, 使用合适的数学工具求解.

$$p(x, y) = p(y)q(x, y) \quad (23)$$

$p(y)$ FPK 的稳态解; $q(x, y)$ 为在边界上满足条件 (19), 离边界较远的点 y 满足 $q(x, y) = 1$ 的解, 即边界层解. 稳态解 $p(y)$ 已经由前人做了很多的工作, 可以由 WKB 近似 (24) 和射线方法 (ray method) 得到. $q(x, y)$ 可以由式 (23) 代入 FPK 方程得到 $q(x, y)$ 的二阶偏微分控制方程, 但是仅在某些条件下可以化简得到 $q(x, y)$ 的解析解 [7]. 由于系统的复杂性, 这里不考虑影响较小的边界层解, 认为 $p(x, y) = p(y)$. 这样可以得到近似公式 (25).

$$p(y) = w(y) \exp\left(-\frac{\Psi(y)}{\varepsilon}\right) \quad (24)$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{\int_{Q(\hat{\Psi})} p(y) dy}{\int_{\partial Q(\hat{\Psi})} J(y) \cdot \nu(y) dS_y} \quad (25)$$

式 (25) 中的 $\hat{\Psi}$ 指鞍点与稳定平衡点间的准势能差 (一般设稳定平衡点势能为 0), $Q(\hat{\Psi})$ 指鞍点处等势能线围成的区域, $\partial Q(\hat{\Psi})$ 为此区域的边界. 这种近似

完全忽略了边界层对解的影响, 由于边界层解仅仅在 δDo 附近有作用, 所以这种近似没有太多地降低解的精度, 但是大大地简化了计算.

这样计算平均首次通过时间的问题就归结为求解 FPK 方程的稳态解 $p(y)$ 的问题. 这里使用射线方法求解稳态解. 式 (24) 代入 FPK 方程后展开并分离 ε 的同阶项, 可以得到 $\Psi(y)$ 的解耦控制方程, Hamilton-Jacobi 方程 (26), 与 $w(y)$ 的非解耦方程, 输运方程 (transport equation)(27).

$$A \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + B \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right)^2 \right] = 0 \quad (26)$$

$$\left[A + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial y_1} + \left[B + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial y_2} + \left[\frac{\partial A}{\partial y_1} + \frac{\partial B}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_2^2} \right) - W_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} - W_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right] = 0 \quad (27)$$

式 (26) 可以使用射线方法转化为 5 个常微分方程来求解得到 $\Psi(y)$, 随后式 (27) 也可以转化为常微分方程求解, 由于式 (27) 还包含 $\Psi(y)$ 的二阶导数, 所以还要增加 4 个常微分方程与 3 个代数方程以求解 $\Psi(y)$ 的二阶导数. 这样求解 FPK 方程的稳态解就化为求解 10 个常微分方程和 3 个代数方程的解, 比直接求解二阶偏微分方程方便很多. 初始条件则由对平衡点的线性化渐进分析得到, 详细的推导见文献 [4], 这里不再列出推导过程.

使用射线方法配合打靶法可以快速得到鞍点相对于非共振解的准势能 $\hat{\Psi}$. 考察 $\omega = 0.80$ 时的情况, 即图 2(a) 对应的情况.

图 5 中 “+” 点为 van der Pol 相图中鞍点的位置, 图中的线为使用打靶法计算得到的接近鞍点的特征线. 计算得到的结果为 $\Delta U_{NR} = 0.017$. 这个结果与之前得到的模拟结果 $\Delta U_{NR} \approx 2.9 \times 10^{-4}$ 完全不在一个数量级上. 使用同样的方法可以得到相对于共振解的鞍点准势能 $\Delta U_R = 0.138$. 这个结果也与原系统的模拟结果不符.

考察 $\omega = 0.89$ 的情况, 即对应图 2(e) 的结果. 本文第一部分通过模拟得到的结果为 $\Delta U_{NR} \approx 0.045$. 通过计算得到的结果为 $\Delta U_{NR} = 0.078$, 相对于前面的情况而言, 这个结果就与模拟结果吻合得较好. 使用同样的方法可以得到相对于共振解的鞍点准势能为 $\Delta U_R = 0.2541$, 这个结果也与原系统的模拟结果相差不多.

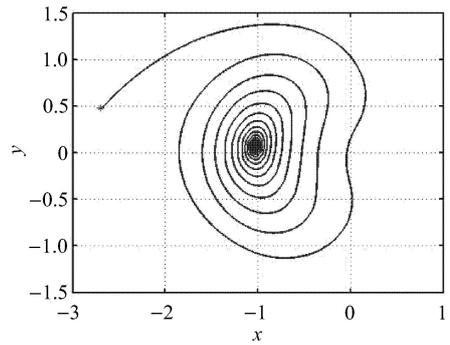
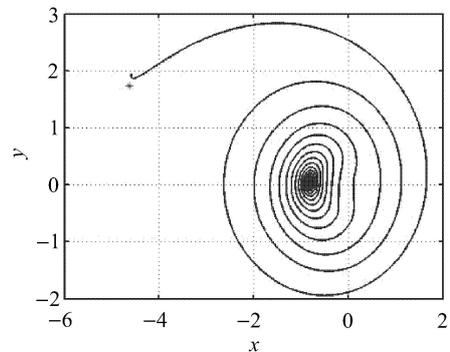
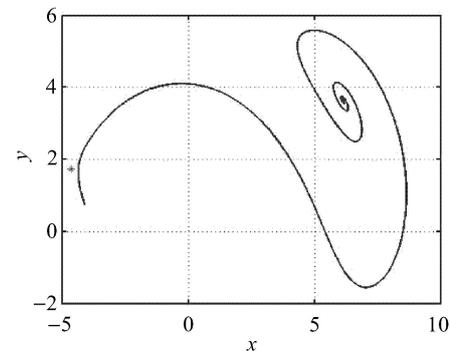


图 5 $\omega = 0.80$ 时, 使用打靶法计算相对于非共振解的鞍点准势能
Fig. 5 Using shooting method to get the quasi-potential of the saddle point relative to non-resonant point with $\omega = 0.80$

有了前面的计算基础, 只需要使如图 6 中的特征线覆盖整个相平面就可以得到吸引域内的 FPK 方程的稳态解, 从而由式 (25) 计算得到最终结果. 下面将模拟结果、式 (1) 的估计结果、式 (25) 的结果绘于图 7 中.



(a)



(b)

图 6 $\omega = 0.89$ 时, 使用打靶法分别计算相对于非共振解与共振解的鞍点准势能

Fig. 6 Using shooting method to get the quasi-potential of the saddle point relative to non-resonant point and resonant point respectively with $\omega = 0.89$

图 7 中可以看出, 不同于 $\omega = 0.80$ 时的情况, 式 (25) 的计算结果与模拟得到的结果在不同的噪声强度下依然是相接近的. 式 (1) 的估计结果与式 (25) 的计算结果变化斜率相同但是都与模拟结果斜率不合, 这个误差应该来源于两者都是忽略了边界层影响的近似.

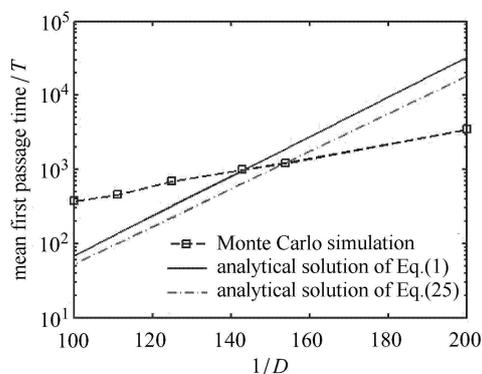


图 7 $\omega = 0.89$ 时, 依式 (1) 与式 (25) 的计算结果与模拟结果

Fig. 7 Result from Eqs.(1), (25) and simulation with $\omega = 0.89$

综合以上 2 个频率点的计算结果, 就得到了前面提到的结果: 当频率点对应的吸引域相图边界光滑时才能得到较好的结果, 如果对应的吸引域边界碎片化时则得到的结果较差.

这里没能从数学上解释为什么同样的方法对一种状态无效, 对另一种状态却有效. 但是可以直观地感受到系统在 $\omega = 0.80$ 时的状态要比 $\omega = 0.89$ 时的状态复杂的多, 奇异性高得多 (见图 2), 而这里所使用的数学工具只适用于处理简单的系统状态, 无法处理高奇异性的状态. 在高奇异性的复杂问题下使用的简化方法可能导致了这种不同.

4 总结与展望

本文首先总结回顾了在整个研究过程中所使用的近似方法, 即: 将极限环稳定性问题转化为平衡点稳定性问题的 van der Pol 变换, 将非自治问题转化为自治问题的随机平均法, 以及对平均首次通过时间的近似表达式 (25). 其中前两者的近似是针对原系统的简化, 后者则是针对计算过程的简化. 图 8 给出了在 $\omega = 0.80$ 时, 原系统 (2) 的模拟得到的稳态解 (图 8(a)) 与平均化后系统 (15) 的解析稳态解 (图 8(b)) 依式 (11) 还原到 (x, y) 相图上的对比.

图 8(b) 中间的圆环代表一个不稳定极限环, 由

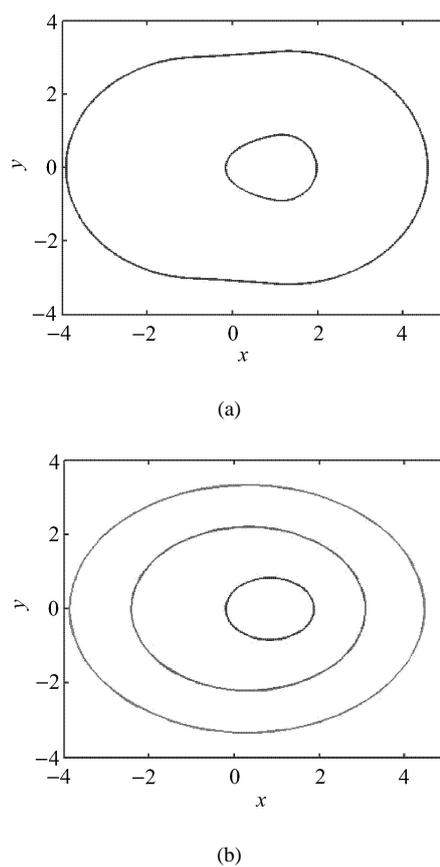


图 8 $\omega = 0.80$ 时, 原系统 (2) 的稳定解与平均化系统 (15) 的稳态解对比

Fig. 8 Comparing the stationary solution of the original system (2) with the averaged system (15) at $\omega = 0.80$

于图 8(a) 是由模拟得到的, 所以无法得到图 8(b) 中间这个不稳定极限环. 对比两图的稳定极限环可以明显看到两者形状有所差别, 原系统的轨线更扁一点, 平均化后的系统轨线均为椭圆, 这是由 van der Pol 变换原理决定的, 这些差别也许就会导致前面的结果. 使用更合适的近似化简方法可能得到比这里更好的结果.

非线性系统的行为总是复杂的, Roy 等^[12]总结了研究非线性系统的 4 个重要流程: 首先找出确定性系统所有可能的极限集; 然后根据极限集的局部稳定性进行分类; 随后分析分岔过程, 明确系统解的发展情况; 最后确定系统的全局稳定性, 不单是确定各个吸引子的吸引域, 还要定量的衡量各个吸引子之间的相对稳定性. 首次平均通过时间就是衡量吸引子之间相对稳定性的重要指标.

本文在前人工作的基础上继续研究了分段线性系统的离出行为, 通过模拟充分了解原系统在某一频率段下的行为后, 使用近似方法化简系统并计算

和比较了两个典型外激励频率下的平均首次通过时间, 并得到了这些方法对于简单相图有效, 而对复杂相图则误差过大的结论. 而对相图中吸引域边界复杂程度的定量研究, 以及与分数维的关系则可以成为以后的研究目标.

参 考 文 献

- 1 刘先斌, 陈虬, 陈大鹏. 非线性随机动力学系统的稳定性和分岔研究. *力学进展*, 1996, 26: 437-452 (Liu Xianbin, Chen Qiu, Chen Dapeng. The researches on the stability and bifurcation of nonlinear stochastic dynamical systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26: 437-452 (in Chinese))
- 2 Roy RV. Large deviation theory, weak-noise asymptotics, and first-passage problems: review and results. In: Lemaire M, Favre JL, Mebarki A, eds. *Applications of Statistics and Probability*. Rotterdam: Balkema AA, 1995. 1129-1135
- 3 Roy RV. Noise perturbations of nonlinear dynamical systems. In: Cheng AHD, Yang CY, eds. *Computational Stochastic Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1993. 125-148
- 4 Ludwig D. Persistence of dynamical systems under random perturbations. *SIAM Review*, 1975, 17: 605-640
- 5 Matkowsky BJ, Schuss Z. The exit problem for randomly perturbed dynamical systems. *SIAM J Appl Math*, 1977, 33: 365-382
- 6 Schuss Z, Spivak A. Where is the exit point? *Chemical Physics*, 1998, 235: 227-242
- 7 Naeh T, Klosek MM, Matkowsky BJ, et al. A direct approach to the exit problem. *Siam J Appl Math*, 1990, 50: 595-627
- 8 Matkowsky BJ, Schuss Z, Tier C. Uniform expansion of the transition rate in Kramers' problem. *Journal of Statistical Physics*, 1984, 35: 443-456
- 9 Roy RV. Noise-induced transitions in weakly-nonlinear oscillators near resonance. *Journal of Applied Mechanics*, 1995, 62: 496-504
- 10 Roy RV. Noise perturbations of a non-linear system with multiple steady states. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1994, 29: 755-773
- 11 Roy RV. Asymptotic analysis of first-passage problems. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1997, 32: 173-186
- 12 Roy RV, Nauman E. Noise-induced effects on a non-linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 183(2): 269-295
- 13 Roy RV. Global stability analysis of nonlinear dynamical systems. *Series on Stability, Vibration and Control of Systems Series B*, 1997, 9: 261-295
- 14 Klosek-Dygas MM, Matkowsky BJ, Schuss Z. Stochastic stability of nonlinear oscillators. *SIAM J Appl Math*, 1988, 48: 1115-1127
- 15 Katz A, Schuss Z. Reliability of elastic structures driven by random loads. *SIAM J Appl Math*, 1985, 45: 383-402
- 16 Matkowsky BJ, Schuss Z, Ben-Jacob E. A singular perturbation approach to Kramer's diffusion problem. *SIAM J Appl Math*, 1982, 42: 835-849
- 17 Matkowsky BJ, Schuss Z. Eigenvalues of the Fokker-Planck operator and the approach to equilibrium for diffusions in potential fields. *SIAM J Appl Math*, 1981, 40: 242-254
- 18 Schuss Z, Matkowsky BJ. The exit problem: a new approach to diffusion across potential barriers. *SIAM J Appl Math*, 1979, 35: 604-623
- 19 Roy RV. Averaging method for strongly nonlinear oscillators with periodic excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, 29: 737-753
- 20 Roy RV. Probabilistic analysis of a nonlinear pendulum. *Acta Mechanica*, 1996, 115: 87-101
- 21 Williams RG. The problem of stochastic exit. *SIAM J Appl Math*, 1981, 40: 208-223
- 22 Zhu WQ, Wu YJ. First-passage time of duffing oscillator under combined harmonic and white-noise excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32: 291-305
- 23 Chen LC, Zhu WQ. First passage failure of quasi-partial integrable generalized Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, 45: 56-62
- 24 Chen LC, Zhu WQ. Reliability of quasi integrable generalized Hamiltonian systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25: 61-66
- 25 Chen LC, Deng ML, Zhu WQ. First passage failure of quasi integrable-Hamiltonian systems under combined harmonic and white noise excitations. *Acta Mech*, 2009, 206: 133-148
- 26 Chen LC, Zhu WQ. First passage failure of quasi non-integrable generalized Hamiltonian systems. *Arch Appl Mech*, 2010, 80: 883-893

(责任编辑: 周冬冬)

RESEARCH FOR ATTRACTING REGION AND EXIT PROBLEM OF A PIECEWISE LINEAR SYSTEM UNDER PERIODIC AND WHITE NOISE EXCITATIONS¹⁾

Kong Chen Liu Xianbin²⁾

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract Exit behaviour is one of the significant phenomena of stochastic nonlinear systems, other than the theory of random dynamical system, the exit problem is an another way to investigate the stochastic stability for a stochastic nonlinear system. The piecewise linear system is a classical model in non-linear dynamics, for which, the stochastic excitation leads to a stochastic system, not a rigorous random dynamical system, and then the theory of random dynamical system is not applicable. Thus, in order to learn the stochastic dynamical behaviours for a piecewise linear system that is under a periodic and a Gaussian white noise excitations, its exit behaviour is examined in the present paper via investigating the mean first-passage time which is one of the most important quantities within exit problem and is also used to quantify the global stability of a stochastic system. Some numerical experiments are designed to investigate the deterministic dynamical behaviors in the case that only the periodic excitations are added, and based upon the Monte Carlo simulation, the other numerical procedures are designed to reveal the exit behavior of the system that is under both periodic and Gaussian white noise excitations. In order to obtain the analytical expression of the mean first-passage time, van der Pol transition and stochastic averaging method are firstly applied to simplify the system, then singular perturbation method and ray method are used to quantify the mean first-passage time. Comparing the analytical results with the analog ones, we conclude that if the attracting boundary is fractal, the two results are far different; otherwise if the attracting boundary is smooth enough, the two results match very well.

Key words piecewise linear systems, exit problem, mean first-passage time

Received 16 September 2013, revised 9 December 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11072107,91016022,11232007), the Research Fund of State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures (Nanjing University of Aeronautics and Astronautics)(0113G01)and A Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions.

2) Liu Xianbin, professor, research interests: dynamics and control, stochastic bifurcation, stochastic dynamics, random vibration.
E-mail: xbliu@nuaa.edu.cn