

边界元中计算任意高阶奇异线积分的直接法¹⁾高效伟 冯伟哲 杨 恺²⁾

(大连理工大学航空航天学院, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 提出了一种精确计算任意高阶奇异曲线积分的直接算法. 首先将曲线单元上的各种几何量用投影线上的几何量来表示, 然后通过幂级数展开和解析的方法显式地消除了积分的奇异性. 还导出了计算等参坐标对局部直角坐标偏导数的表达式. 由于这种方法涉及到的是总体尺度间的坐标变换, 操作起来直观明了, 可以处理二维问题边界元分析中出现的任意高阶奇异边界积分. 最后用具体算例验证该方法的正确性.

关键词 边界单元法, 奇异积分, 幂级数展开, 投影线

中图分类号: O302 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-248

引言

边界单元法使用具有奇异性的基本解作为核函数, 当源点位于或接近于积分单元上时, 会出现积分奇异性, 通常包括的奇异性有弱奇异、强奇异、超强奇异和几乎奇异等^[1]. 边界元法的有效实施要求精确计算各种核函数的奇异边界积分. 对奇异性的处理多年来一直是边界元爱好者的重要课题, 已提出不少有效的计算方法^[1-6]. 常用的方法有: 针对弱奇异问题的对数高斯积分法、针对强奇异问题的刚体位移法、处理超强奇异积分的正则化技术^[7], 以及处理近奇异积分的积分变换法^[8-12]. 在处理近奇异积分方法中, Gao 等^[13]用单元子分技术数值地解决了近奇异问题, Zhou 等^[14]用一种完全解析的积分方法处理了二维各向异性位势问题中的近奇异积分. 在处理高阶奇异积分中, Guiggian 等^[2]提出了一种在等参坐标系下处理超强奇异边界积分的直接算法, 通过将几何量展开成泰勒级数的方法消除积分奇异性. 这种方法后来被 Karami 和 Derakhshan^[3]发展成能处理各种超奇异积分的算法. Gao^[1,7]通过采用将被积函数中非奇异部分展开成幂级数的技术, 提出了一种能处理各种高阶奇异曲线边界积分的方法. 这些能处理高阶奇异积分方法的共同点就是积分操作是在等参坐标系下进行的, 为了解析地消除积分奇异性, 需要将等参坐标系下的展开系数由物理坐标系下的几何量来表示. 这种工作非常繁琐, 对

直观理解和程序实现都有一定的难度.

本文通过将曲线单元投影到过单元中心的切线上的方法, 提出了一种在投影线上解析地消除各种积分奇异性的新方法. 在这种方法的实施中, 本文还导出了计算等参坐标对投影线坐标一阶和二阶偏导数的公式, 为各种几何量、物理量在投影线上展开成泰勒级数提供了方便.

1 边界积分的奇异性分类

在力学问题边界元分析中, 经常遇到如下的边界积分^[13]

$$I(\mathbf{x}^p) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})}{r^{\beta}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (1a)$$

$$J(\mathbf{x}^p) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) \ln[r(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})]}{r^{\beta}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (1b)$$

其中, $\bar{f}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})$ 为没有奇异性的正则函数, $\mathbf{x}^p$ 为源点, $\mathbf{x}$ 为场点, β 为奇异性阶次. Γ 为计算域的边界, 在二维问题中为一封闭的曲线, r 为源点到场点的距离, 定义为

$$r(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p\| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - x_i^p)^2} \quad (2)$$

2013-07-30 收到第 1 稿, 2013-11-18 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11172055, 11202045).

2) 杨恺, 博士, 主要研究方向: 计算力学. E-mail: KYang@dlut.edu.cn

式 (1) 中的边界积分的奇异性可定义为: $\beta = 0$, 式 (1a) 为正则积分, 式 (1b) 为弱奇异积分; $0 < \beta < 1$, 式 (1a) 为弱奇异积分, 式 (1b) 为强奇异积分; $\beta = 1$, 式 (1a) 为强奇异积分, 式 (1b) 为超强奇异积分; $1 < \beta \leq 2$, 式 (1a) 为超强奇异积分, 式 (1b) 为超奇异积分; $\beta > 2$, 式 (1a) 和式 (1b) 均为超奇异积分.

对一个有限域问题, 正则积分和弱奇异积分总是存在的 (即积分结果是一有限值). 但是对于强奇异、超强奇异和超奇异积分, 积分是否存在取决于函数 $\bar{f}(\mathbf{x}^p, \mathbf{x})$ 的性质. 一般来讲, 出于一个实际物理问题的积分总是存在的. 在本文中, 奇异积分是计算其在主值意义下的有限部分, 即

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \lim_{\Gamma_{\varepsilon} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (3)$$

其中 Γ_{ε} 是包含源点 $\mathbf{x}^p$ 的无穷小的边界.

2 边界单元的离散和正则边界积分计算

为了计算边界积分 (1), 通常将计算边界 Γ 离散成一系列由边界节点组成的线性边界单元或者二次单元, 单元内任一点的坐标可由单元的节点坐标表示为

$$x_i(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N_{\text{node}}} N_{\alpha}(\xi) x_i^{\alpha} \quad (4)$$

式中, N_{node} 为单元节点数, ξ 为单元的等参坐标, x_i^{α} 为第 α 个节点的第 i 个坐标分量, N_{α} 为第 α 个节点的形函数^[7], 可以表示为

线性单元

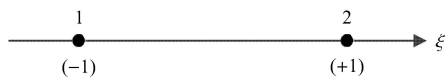
$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= (1 - \xi)/2 \\ N_2(\xi) &= (1 + \xi)/2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

二次单元

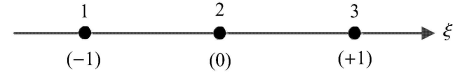
$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \xi(\xi - 1)/2 \\ N_2(\xi) &= \xi(\xi + 1)/2 \\ N_3(\xi) &= 1 - \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

单元上节点的分布和单元在等参坐标下的表见图 1.

事实上, 将边界离散成边界单元后, 不仅是坐标, 单元内任何几何量和物理量都可以由其节点值用类似的公式来表示.



(a) 线性单元
(a) Linear element



(b) 二次单元
(b) Quadratic element

图 1 等参坐标系下的边界单元

Fig. 1 Boundary element in intrinsic coordinate

当把求解域边界离散为 N_{elem} 个单元之后, 方程 (1a) 可离散成如下形式

$$I(\mathbf{x}^p) = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \int_{\Gamma_e} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma_e(\mathbf{x}) \quad (7)$$

其中, Γ_e 是第 e 个单元的计算区域.

当源点不在积分单元上时, 式 (7) 中的积分不会出现奇异性, 此时可用高斯数值积分公式对其求积. 对于第 e 个单元的积分公式可以形成

$$\begin{aligned} I_e(\mathbf{x}^p) &= \int_{\Gamma_e} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) d\Gamma = \\ &= \int_{-1}^1 f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}) |J_e| d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{N_g} f(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}(\xi_n)) |J_e| w_n \end{aligned} \quad (8)$$

其中, N_g 是高斯点的个数, ξ_n 和 w_n 分别为高斯点坐标和权系数, $|J_e|$ 是从总体坐标到等参坐标转换的雅各比^[7]

$$|J_e| = \sqrt{(\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial y / \partial \xi)^2} \quad (9)$$

式中, $\partial x / \partial \xi$ 和 $\partial y / \partial \xi$ 可以由式 (4) 确定.

式 (8) 可以用来计算正则积分 (源点 $\mathbf{x}^p$ 不在积分单元内), 当源点 $\mathbf{x}^p$ 位于积分单元上时, 源点到场点的距离 r 趋近于 0, 因此需要特殊的奇异积分技术, 将在后面内容中介绍.

3 几何量在投影线上的展开式

二维问题的边界单元通常为一条曲线, 直接进行积分计算比较复杂. 因此, 引入一投影线进行操作. 投影线取为过等参坐标原点 ($\xi = 0$) 处的切线. 在投影线上建立一个局部直角坐标系 (x', y') 或写成 (x'_1, x'_2), 其中 x'_1 轴在切线方向, x'_2 轴沿单元在 origin 处的外法线方向, 如图 2 所示.

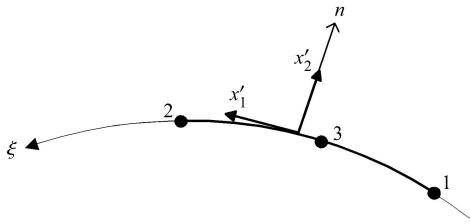


图 2 曲线单元投影线上建立的局部坐标系

Fig. 2 Local coordinate on projection line of a curve element

设局部坐标系的坐标轴相对于旧坐标系的方向余弦为 L_{ij} , 其确定方法可以在相关文献中找到, 如文献 [13]. 坐标间的转换由下式实现

$$x'_i = L_{ij}(x_j - x_j^o) \quad (10)$$

$$x_i - x_i^o = L_{ji}x'_j \quad (11)$$

式中的重复下标表示求和, x_i^o 为新坐标系的原点在旧坐标系中的坐标, 可通过使用 ($\xi = 0$) 由式 (4) 求得.

为了能够解析地消除积分奇异性, 需要将曲线上几何量表示成投影线上的几何量 ρ 和 $\rho_{,1}$ 的函数, 其中 ρ 为投影线上源点 P' 到场点 Q' 的距离 (见图 3), 其定义如下

$$\rho = \|x'_1 - x_1^{p'}\| \quad (12)$$

式中, $x_1^{p'}$ 为源点 P 在局部坐标系下的坐标的第 1 个分量, $\rho_{,1}$ 为 ρ 对局部坐标系第 1 个分量的偏导数, 其定义式如下

$$\rho_{,1} = \frac{\partial \rho}{\partial x'_1} = \frac{x'_1 - x_1^{p'}}{\rho} \quad (13)$$

由于 ρ 和 x'_1 在同一条直线上, 故 $\rho_{,1}$ 实际取值为 -1 或 +1.

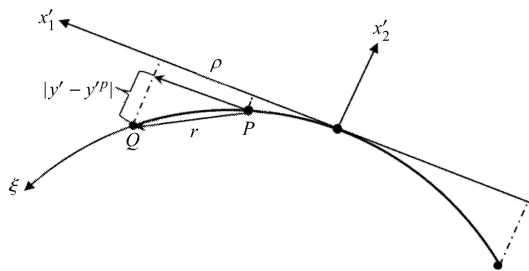


图 3 投影线上变量的定义

Fig. 3 Variable defining on the projection line

由于投影线上的独立变量只有 1 个, 故取 x'_1 为独立变量. 原边界单元上的场点 Q 在局部坐标系中

的 y' 分量 (即 x'_2) 也可由 x'_1 表示. 为此, 将 y' 在局部坐标系中的原点处展开成泰勒级数 (只保留二阶项) 有

$$y' = \frac{\partial y'}{\partial x'_1} x'_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2_1} x'^2_1 = a_1(y') x'_1 + a_2(y') x'^2_1 \quad (14)$$

其中

$$a_1(y') = \frac{\partial y'}{\partial x'_1} = \frac{\partial y'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'_1} \quad (15)$$

$$a_2(y') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_1} \left(\frac{\partial y'}{\partial x'_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y'}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x'_1} \frac{\partial \xi}{\partial x'_1} + \frac{\partial y'}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x'^2_1} \right) \quad (16)$$

并有

$$\frac{\partial y'}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial \xi} y^n, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial \xi^2} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial^2 N_n}{\partial \xi^2} y^n \quad (17)$$

通过微分法则, 导出式 (15) 和式 (16) 中等参坐标对局部坐标的偏导数计算式为

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'_1} = \frac{1}{|m_1|} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x'^2_1} = -\frac{1}{|m_1|^4} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi^2} \right) \quad (19)$$

其中

$$|m_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2} \quad (20)$$

为了在投影线上积分, 由式 (13) 可得到局部坐标 x'_1 用 ρ 来表达的关系式为

$$x'_1 = x_1^{p'} + \rho_{,1} \rho \quad (21)$$

将式 (21) 代入到式 (14) 中则可以得到曲线上的 y' 与 ρ 的变化关系式为

$$y' = y'^p + q(y', \rho) \rho \quad (22)$$

式中

$$q(y', \rho) = q_1(y') + a_2(y') \rho \quad (23)$$

$$q_1(y') = [a_1(y') + 2a_2(y') x_1^{p'}] \rho_{,1} \quad (24)$$

同理可以导出等参坐标的表达式

$$\xi = \xi^p + q(\xi, \rho) \rho \quad (25)$$

其他量的展开式为

$$x_i = x_i^p + (b_i + c_i \rho) \rho \quad (26)$$

$$r = \sqrt{(x_i - x_i^p)(x_i - x_i^p)} = g(\rho) \rho \quad (27)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_i^p}{r} = \frac{b_i + c_i \rho}{g(\rho)} \quad (28)$$

式中

$$b_i = L_{1i} \rho_{,1} + L_{2i} q_1(y', \rho) \quad (29)$$

$$c_i = L_{2i} a_2(y') \quad (30)$$

$$g(\rho) = \sqrt{1 + q^2(y', \rho)} = \sqrt{G_0 + G_1 \rho + G_2 \rho^2} \quad (31)$$

这里, $G_0 = b_i b_i$, $G_1 = 2b_i c_i$, $G_2 = c_i c_i$.

投影线上的微线段长度与实际曲线上的微线段长度间的关系为

$$d\rho = d\Gamma n_i^0 n_i \quad (32)$$

式中, n_i^0 和 n_i 分别为局部坐标系原点和场点的外法线方向余弦.

利用上述公式, 则可将曲线上的几何量表示成投影线上的几何量, 然后采用解析的方法消除积分奇异性.

4 超奇异线积分计算公式

将式 (32) 和式 (27) 代入式 (1) 的第 e 个线单元中, 则可将沿曲线的积分转换成沿直线的积分

$$I_e(x^p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_\varepsilon}^{\rho_E} \frac{\bar{F}(\rho)}{\rho^\beta} d\rho \quad (33)$$

$$J_e(x^p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_\varepsilon}^{\rho_E} \frac{\bar{F}(\rho) \ln \rho}{\rho^\beta} d\rho + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_\varepsilon}^{\rho_E} \frac{\bar{F}'(\rho)}{\rho^\beta} d\rho \quad (34)$$

其中, 积分上限 ρ_E 为切线内源点到单元一端点的距离, ρ_ε 为切线上的无穷小距离, $\bar{F}$ 和 $\bar{F}'$ 为正则部分, 有

$$\bar{F}(\rho) = \frac{\bar{f}(x^p, x)}{g^\beta(\rho) n_i^0 n_i} \quad (35)$$

$$\bar{F}'(\rho) = \frac{\bar{f}(x^p, x) \ln[g(\rho)]}{g^\beta(\rho) n_i^0 n_i} \quad (36)$$

为了对式 (33) 和式 (34) 进行求积, 将 $\bar{F}$ 和 $\bar{F}'$ 展开成 ρ 的幂级数

$$\bar{F}(\rho) = \sum_{n=0}^N B^{(n)} \rho^n, \quad \bar{F}'(\rho) = \sum_{n=0}^N C^{(n)} \rho^n \quad (37)$$

其中, N 为幂级数阶数, 通常在 2 到 9 之间取值, 依赖于 ρ_E 的大小; $B^{(n)}$ 和 $C^{(n)}$ 为待定系数, 可通过

在积分区间 $(0, \rho_E)$ 布置 $N+1$ 个点 $(0, \rho_1, \dots, \rho_N)$ 来确定. 第 1 个点 ($n=0$) 的系数为

$$B^{(0)} = \bar{F}(0), \quad C^{(0)} = \bar{F}'(0) \quad (38)$$

其他系数可由如下矩阵方程解得

$$\mathbf{R}\mathbf{B} = \mathbf{Y}, \quad \mathbf{R}\mathbf{C} = \mathbf{Y}' \quad (39)$$

其中, $\mathbf{R}$ 为 N 阶方阵.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^N \\ \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_N & \rho_N^2 & \cdots & \rho_N^N \end{bmatrix} \quad (40)$$

$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{Y}$ 为如下向量

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中, $Y_n = \bar{F}(\rho_n) - B^{(0)}$. $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{Y}'$ 有类似于式 (41) 的形式, 不过有 $Y'_n = \bar{F}'(\rho_n) - C^{(0)}$.

系数 $\mathbf{B}$ 确定后, 则将式 (39) 代入式 (33), 得

$$I_e(x^p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_\varepsilon}^{\rho_E} \frac{\bar{F}(\rho)}{\rho^\beta} d\rho = \sum_{n=0}^N B^{(n)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_\varepsilon}^{\rho_E} \rho^{n-\beta} d\rho = \sum_{n=0}^N B^{(n)} E_n \quad (42)$$

式中

$$E_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1-\beta} \left(\rho_E^{n+1-\beta} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon^{n+1-\beta} \right), & n \neq \beta - 1 \\ \ln \rho_E - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \rho_\varepsilon, & n = \beta - 1 \end{cases} \quad (43)$$

对于确定的物理问题, 上述积分结果应该是一有限值, 也就是说, 当考虑源点 x^p 周围所有单元的结果后, 式 (43) 中与无穷小项相关的项最终贡献应该为 0. 然而, 要消除该发散项, 要求源点周围的单

元都采用相同的无穷小尺度 ε , 为此需要将局部尺度 ρ_ε 转化为全局尺度 ε . 转化后得结果为^[1-3]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \rho_\varepsilon = \ln H_0 + \text{Infinite terms} \quad (44)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\rho_\varepsilon^{\beta-n-1}} = H_{\beta-n-1} + \text{Infinite terms} \quad (45)$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{G_0}}, \quad H_1 = \frac{G_1}{2G_0} \quad (46a)$$

$$H_2 = \frac{G_2}{G_0} - \frac{G_1^2}{2G_0^2} \quad (46b)$$

更高阶的 H_m 的推导见文献 [1].

于是有

$$E_n = \begin{cases} \frac{-1}{\beta-n-1} \frac{1}{\rho_E^{\beta-n-1}} - H_{\beta-n-1}, & 0 \leq n \leq \beta-2 \\ \ln \rho_E - \ln H_0, & n = \beta-1 \\ \frac{1}{n+1-\beta} \rho_E^{n+1-\beta}, & n > \beta-1 \end{cases} \quad (47)$$

用同样的处理方式, 可由式 (34) 得到如下的计算式

$$J_e(\mathbf{x}^p) = \sum_{n=0}^N C^{(n)} E_n + \sum_{n=0}^N B^{(n)} T_n \quad (48)$$

其中, E_n 的表达式同上, T_n 的表达式如下

$$T_n = \begin{cases} \frac{-[(\beta-n-1)\ln \rho_E + 1]}{(\beta-n-1)^2 \rho_E^{\beta-n-1}} + \frac{1}{(\beta-n-1)^2} H_{\beta-n-1} + \frac{1}{\beta-n-1} W_{\beta-n-1}, & 0 \leq n \leq \beta-2 \\ \frac{1}{2} \ln^2 \rho_E - \frac{1}{2} W_0, & n = \beta-1 \\ \frac{(n+1-\beta)\ln \rho_E - 1}{(n+1-\beta)^2} \rho_E^{n+1-\beta}, & n > \beta-1 \end{cases} \quad (49)$$

其中 H_n 由式 (46) 计算, W_n 的表达式如下

$$W_0 = \ln^2 \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \right) = \frac{1}{4} \ln^2 G_0 \quad (50a)$$

$$W_1 = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \right) \frac{G_1}{2G_0} + \sqrt{G_0} \ln \left(-\frac{G_1}{2G_0^2} \right) \quad (50b)$$

$$W_2 = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \right) \frac{2G_0 G_2 - G_1^2}{2G_0^2} + \frac{G_1}{\sqrt{G_0}} \ln \left(-\frac{G_1}{2G_0^2} \right) + G_0 \ln \left(\frac{5G_1^2 - 4G_2 G_0}{8G_0^3 \sqrt{G_0}} \right) \quad (52c)$$

式 (47) 和式 (49) 中的 ρ_E 为源点到单元端点的距离, 不会为 0, 也就没有奇异性. 用式 (42) 和式 (47) 以及式 (48) 和式 (49) 可计算任意阶次的超奇异线积分.

5 算例分析

使用本文导出的公式, 编制了相应的计算机程序, 并对一些奇异线积分进行了计算分析.

5.1 算例 1

第 1 个算例是计算积分 $J = \int_r \ln(r) d\Gamma$. 在二维弹性力学问题的边界元分析中, 和位移基本解相对应的边界积分中会出现这一类的奇异积分问题^[13]. 积分区域如图 4 所示. 积分区间 Γ 被划分一个三节点二次单元, 节点全局坐标分别为 1($x=0.0, y=0.0$), 2($x=2.0, y=0.0$), 3($x=1.0, y=0.5$), 源点位于节点 3. 对于该积分, 可以使用对数高斯积分公式进行精确计算, 得到的结果为 $J = -2.00526$.

为了检验积分结果和式 (45) 中幂级数阶数 N 的依赖关系, 表 1 给出了 N 取不同值时的计算结果. 从表中可以看出, 当 N 大于 5 时便可得到非常精确的结果.

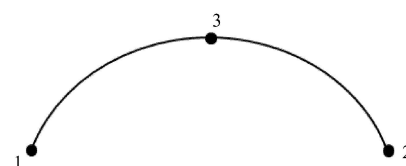


图 4 曲线边界单元

Fig. 4 Curve boundary element

表 1 N 取不同值时的计算结果 (精确值为 $J = -2.00526$)

Table 1 Computed results for various values of N
(accurate result is $J = -2.00526$)

N	3	4	5	7	9
J	-2.00498	-2.00514	-2.00525	-2.00526	-2.00526

5.2 算例 2

第 2 个算例是计算如下的积分

$$\int_r \frac{r_i}{r} d\Gamma, \quad \int_r \frac{r_i}{r^2} d\Gamma, \quad \int_r \frac{r_i}{r^3} d\Gamma$$

$$\int_r \frac{r_i \ln(r)}{r} d\Gamma, \quad \int_r \frac{r_i \ln(r)}{r^2} d\Gamma$$

$$\int_r \frac{r_i \ln(r)}{r^3} d\Gamma$$

其中 $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$. 积分区域是长度为 3 的直线, 倾角为 30° (见图 5). 源点位于直线长度的 $1/3$ 位置处.

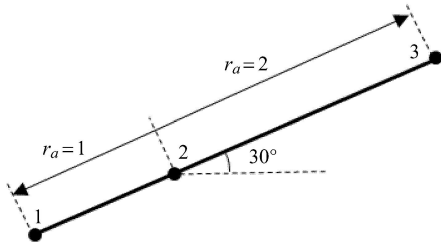


图 5 线性边界单元

Fig. 5 Linear boundary element

将直线划分为两个线性单元, $r_{,i}$ 是固定不变的. 对于由单元 1 (节点 1, 2 组成), $r_{,1} = r_{,x} = -\cos 30^\circ$, $r_{,2} = r_{,y} = -\sin 30^\circ$. 对于单元 2 (节点 2, 3 组成), $r_{,1} = \cos 30^\circ$, $r_{,2} = \sin 30^\circ$. 对于此问题, 解析结果可以得到, 例如第 1 个积分式为

$$\int_{\Gamma} \frac{r_{,1}}{r} d\Gamma = \cos 30^\circ \ln(r_b/r_a) = 0.600\ 28$$

$$\int_{\Gamma} \frac{r_{,2}}{r} d\Gamma = \sin 30^\circ \ln(r_b/r_a) = 0.346\ 57$$

表 2 和表 3 分别列出 2 个分量的计算结果 ($N = 7$), 并给出了解析结果作为比较. 从表 2 和表 3 可以看出, 2 种结果几乎相同.

表 2 $I_1(x^p)$ 的计算结果Table 2 Computed results for $I_1(x^p)$

	$\int_{\Gamma} (r_{,1}/r^2) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,1}/r^3) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,1} \ln r/r) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,1} \ln r/r^2) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} r_{,1} \ln(r)/r^3 d\Gamma$
analytical	0.433 013	0.324 760	0.208 042	0.132 871	$87.344\ 4 \times 10^{-3}$
current	0.433 013	0.324 760	0.208 042	0.132 871	$87.344\ 4 \times 10^{-3}$

表 3 $I_2(x^p)$ 的计算结果Table 3 Computed results for $I_2(x^p)$

	$\int_{\Gamma} (r_{,2}/r^2) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,2}/r^3) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,2} \ln r/r) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,2} \ln r/r^2) d\Gamma$	$\int_{\Gamma} (r_{,2} \ln r/r^3) d\Gamma$
analytical	0.250 000	0.187 500	0.120 113	76.7132×10^{-3}	50.4283×10^{-3}
current	0.250 000	0.187 500	0.120 113	$76.713\ 2 \times 10^{-3}$	$50.428\ 3 \times 10^{-3}$

5.3 算例 3

第 3 个算例考虑的积分是 $I(x^p) = \int_{\Gamma} T_{ij} d\Gamma$, 式中 T_{ij} 是弹性力学问题中的面力基本解 ($\beta = 1$)^[13]

$$T_{ij} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^\beta} \left[(1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) + (2r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}) \frac{\partial r}{\partial n} \right]$$

计算区域是一段圆弧 (见图 6), 圆弧被划分为一个三节点二次单元, 节点坐标分别为 1(1, 0), 2(0.535 53, 0.535 53), 3(0, 1). 计算源点 a, b, c 在等参坐标系下的坐标分别为 $\xi = -0.3$, $\xi = 0.0$ 和 $\xi = 0.3$.

表 4 给出了 β 取 1 时的计算结果. 为了检验当前结果的正确性, 表中也给出了文献 [1] 对此问题的计算结果.

从表格中可以看出本文的计算结果与文献 [1] 计算结果非常接近, 证明了本文所述方法的正确性.

为了考察本文所述方法的稳定性, 还对 $\beta = 1$ 和 $\beta = 5$ 时, N 取不同值的情况进行了计算.

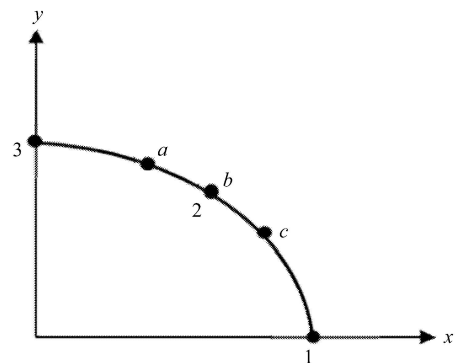


图 6 曲线边界单元

Fig. 6 Curve boundary element

表 5 和表 6 列出了用 3 种不同奇异性处理方法对 I_{11} 在 b 点的计算结果.

从表 4 和表 6 可以看出, 基于总体尺度的计算方法 (本文和文献 [7]) 的结果几乎相等, 而且对幂级数的阶次 N 的依赖较小; 而基于等参坐标系下操作的奇异性处理方法 (文献 [1]) 对低价奇异积分的计算结果比较稳定, 对高阶奇异积分的结果对 N 的大

表 4 N 取不同值时 I_{11} 的计算结果 ($\beta = 1$)Table 4 Computed results for I_{11} with various values of N ($\beta = 1$)

N	2	4	6	7	8
Ref.[1]	-22.3276×10^{-3}	-22.4006×10^{-3}	-22.4420×10^{-3}	-22.4559×10^{-3}	-22.4670×10^{-3}
Ref.[7]	-22.6068×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}
current	-22.5931×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}

表 5 3 个不同源点的奇异积分计算结果 ($N = 8$)Table 5 Computed results for 3 source points ($N = 8$)

	Point a		Point b		Point c	
	Ref.[1]	current	Ref.[1]	current	Ref.[1]	current
I_{11}	-21.7839×10^{-3}	-21.8920×10^{-3}	-22.4670×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-23.1329×10^{-3}	-23.2549×10^{-3}
I_{12}	-12.0403×10^{-3}	-11.9570×10^{-3}	15.9938×10^{-3}	16.0771×10^{-3}	43.9874×10^{-3}	44.0679×10^{-3}
I_{21}	43.9874×10^{-3}	44.0679×10^{-3}	15.9938×10^{-3}	16.0771×10^{-3}	-12.0403×10^{-3}	-11.9570×10^{-3}
I_{22}	-23.1329×10^{-3}	-23.2549×10^{-3}	-22.4670×10^{-3}	-22.5836×10^{-3}	-21.7839×10^{-3}	-21.8920×10^{-3}

表 6 N 取不同值的时候 I_{11} 的计算结果 ($\beta = 5$)Table 6 Computed results for I_{11} with various values of N ($\beta = 5$)

N	2	4	6	7	8
Ref.[1]	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}
Ref.[7]	28.7782×10^{-3}	28.7782×10^{-3}	28.7769×10^{-3}	28.7773×10^{-3}	28.7773×10^{-3}
current	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}	28.8277×10^{-3}

小很敏感. 相对文献 [7] 的总体尺度方法而言, 本文方法在投影线 (切线) 上操作, 直观明了, 容易推广到对高阶奇异面积分的处理.

6 结 论

本文提出了一种新的计算二维问题高阶奇异边界积分的直接法, 通过在投影线上对几何量的操作, 克服了传统方法在等参坐标系下消除积分奇异性时繁琐的强奇异系数提取过程, 导出的公式可处理任意高阶的奇异边界积分. 论文导出的等参坐标对局部正交坐标的一阶和二阶偏导数公式, 为曲线上的复杂几何量展开成投影线参数的表达式提供了基础. 几何量在局部坐标系原点 (而不是在源点) 展开成泰勒级数, 保证了高阶的计算精度. 计算表明, 基于总体尺度的奇异性处理方法要比等参坐标系下的处理方法更稳定.

参 考 文 献

- Gao XW. An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high order singular boundary integrals. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2010, 199: 2856-2864
- Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolph TJ, et al. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *J Appl Mech*, 1992, 59: 604-614
- Karami G, Derakhshan D. An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23: 317-326
- Huber O, Lang A, Kuhn G. Evaluation of the stress tensor in 3D elastostatics by direct solving of hypersingular integrals. *Computational Mechanics*, 1999, 12: 39-50
- Mukherjee S, Mukherjee YX. The hypersingular boundary contour method for three-dimensional linear elasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1998, 65: 300-309
- Marczak RJ, Creus GJ. Direct evaluation of singular integrals in boundary element analysis of thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, 26: 653-665
- Gao XW. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals—Theory and fortran code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 188(1): 44-64
- Liu YJ. Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3-D elasticity, formulation and verification. *Int J Numer Meth Engng*, 1998, 41(3): 541-558
- Ma H, Kamiya N. Distance transformation for the numerical evaluation of near singular boundary integrals with various kernels in boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, 26(4): 329-339
- 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 三维边界元法中几乎奇异积分的正则化算法. *力学学报*, 2004, 36(1): 49-56 (Niu Zhongrong, Wang Xiuxi, Zhou Huanlin. A regularization algorithm for the nearly singular integrals in 3-D BEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(1): 49-56 (in Chinese))
- 张耀明, 孙翠莲, 谷岩. 边界积分方程中近奇异积分计算的一种变量替换法, *力学学报*, 2008, 40(2): 207-214 (Zhang Yaoming, Sun

- Cuilian, Gu Yan. The evaluation of nearly singular integrals in the boundary integral equations with variable transformation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(2): 207-214 (in Chinese))
- 12 Qin XY, Zhang JM, Xie GZ, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular integrals on 3D boundary element. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235: 4174-4186
- 13 Gao XW, Davies TG. *Boundary Element Programming in Mechanics*. London: Cambridge University Press, 2002
- 14 Zhou HL, Niu ZR, Cheng CZ, et al. Analytical integral algorithm applied to boundary layer effect and thin body effect in BEM for anisotropic potential problems. *Computers & Structures*, 2008, 86 (15-16): 1656-1671

(责任编辑: 刘希国)

A DIRECT METHOD FOR EVALUATING LINE INTEGRALS WITH ARBITRARY HIGH ORDER OF SINGULARITIES¹⁾

Gao Xiaowei Feng Weizhe Yang Kai²⁾

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract This paper presents a new direct method for evaluating arbitrary singular boundary integrals appearing in 2D boundary element analysis. Firstly, geometry quantities on a curved line element are expressed using those projected on a tangential line. Then, singularities involved in the integrals are analytically removed by expressing the non-singular part of the integration kernel as power series. A set of formulations for computing the first and second derivatives of intrinsic coordinates with respect to local orthogonal coordinates are also presented in the paper for the first time. Since the coordinate transformation is at the real spatial scale, the operation is straightforward and convenient, and can be applied to treat arbitrary high order of singular integrals. Finally, some examples are given to verify the correctness and stability of the presented method.

Key words boundary elements method, singular integral, power series expansion, projection line

Received 30 July 2013, revised 18 November 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172055, 11202045).

2) Yang Kai, PhD candidate, research interests: computational mechanics. E-mail: KYang@dlut.edu.cn