第 45 卷 第 6 期 力 学 学 报 Vol. 45，No. 6
2013 年 11 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Nov.，2013

研究论文

二维边界元法高阶元几乎奇异积分半解析算法[1)]

牛忠荣[2)] 胡宗军 葛仁余 程长征

(合肥工业大学土木与水利工程学院，合肥 230009)

摘要 针对边界元法中高阶单元中几乎奇异积分计算难题，解剖了二维边界元法高阶单元的几何特征，定义源点相对高阶单元的接近度. 将高阶单元上奇异积分核函数用近似奇异函数逼近，从而分离出积分核中主导的奇异函数部分，其奇异积分核分解为规则核函数和奇异核函数两项积分之和. 规则核函数用常规高斯数值积分，再对奇异核函数积分导出解析公式，从而建立了一种新的半解析法，用于高阶边界单元上几乎强奇异和超奇异积分计算. 给出 3 个算例，采用边界元法高阶单元的半解析法计算了弹性力学薄体结构和近边界点位移/应力，并与线性边界元正则化算法结果作了比较，结果表明提出的二次元的半解析算法更加有效. 特别是分析薄体结构，采用正则化算法的线性边界元分析比有限元有显著优势，而用提出的二次边界元半解析算法分析比其线性元的有效接近度又减小了 4 个量级.

关键词 弹性力学，边界元法，高阶单元，几乎奇异积分，半解析法

中图分类号：O343.1 **文献标识码**：A DOI：10.6052/0459-1879-13-215

引 言

边界元法中基本解通常含 $O(1/r^{\alpha})$ 类奇性，r 为源点与场点之间距离，$\alpha \geqslant 1$. 当源点与场点重合，基本解是奇异的；当源点与场点不重合但趋近于场点时，即 $r \to 0$ 但不为 0，边界元上积分核函数存在几乎奇异性. 常规高斯 (Gauss) 数值积分难以计算几乎奇异积分. 边界元法中几乎奇异积分主要存在以下几种情况：(1) 薄体问题；(2) 近边界点物理量的求解；(3) 近邻单元网格尺寸变化较大处. 几乎奇异积分计算难题是制约边界元法发展主因之一.

Luo 等 [1] 将二维问题几乎奇异积分转化为单元首末节点的解析函数，对于高次单元几乎弱奇异积分采用非线性变换后用常规高斯积分计算，但需要较多高斯点才能获得理想计算结果. Ma 等 [2] 采用补积分域法对内点临近积分边界重构，使源点远离边界，但虚、实边界间的距离选取概念模糊，影响结果的精度和可靠性. Sladek 等 [3] 对高阶边界单元对数型核函数作了冗长的积分变换，处理了几乎弱奇异积分. Padhi 等 [4] 利用雅可比的泰勒级数展开，将几乎超奇异积分核函数转化为多项式形式，其解析表达式冗长繁杂，并带入截断误差，结果不甚理想. Shhiah 等 [5] 利用坐标插值关系将距离函数 $r(\xi)$ 和雅可比变换函数在局部坐标系下展开，获得弱几乎奇异积分和强几乎奇异积分的半解析计算公式.

牛忠荣等 [6-8] 采用分部积分法，导出边界元法线性单元几乎强奇异和超奇异积分的半解析公式 (对三维问题) 和解析公式 (对二维问题)，并成功应用于位势和弹性力学问题分析. 对高阶几何单元时，源点到场点距离 r 的函数形式复杂，如二次单元在局部坐标系下，r 是一个四次多项式开方函数，从而使得几乎奇异积分难以解析计算. 张耀明等 [9] 对边界圆弧单元产生的几乎奇异积分构造一种积分变量的非线性变换，计算了二维位势问题和弹性力学问题. Mehdi 等 [10] 将笛卡尔空间下的圆弧单元几乎奇异积分转化为复空间内的解析函数积分，消除几乎奇异性. 圆弧单元不具通用性，张耀明等 [11] 对二次单元上近奇异积分核函数进行变换，然后将规则函数部分用 6 阶的拉格朗日多项式插值替代，计算了几乎奇异积分，并用于二维位势问题的边界元分析. Zhang 等 [12] 进一步采用非等参元，即边界物理量用二次间断元，单元几何用圆弧模拟，分析了热弹性力学问题.

Fata [13] 给出了伽辽金 (Galerkin) 边界积分方程

2013–07–03 收到第 1 稿，2013–08–01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11272111, 11102056).

2) 牛忠荣，教授，主要研究方向：计算力学. E-mail：niu-zr@hfut.edu.cn

的三角形单元几乎弱奇异面积分半解析算法. Xie 等 [14-15] 用边界单元上距离源点最近的点 x^c 为源点在单元上的投影点，在单元积分式中对源点到单元的距离函数做一系列变换，较好地计算了二维和三维边界元法中近奇异积分问题.

目前对边界元法中几乎奇异积分计算给出了许多算法，主要是线性单元和特殊的圆弧单元，涉及到一般高阶单元的几乎强奇异和超奇异积分缺乏有效的通用算法. 在求解薄体结构应力集中和断裂问题时，采用高阶等参元的边界元分析是高效的. 本文对二维边界元法高阶等参元上积分核进行变换，将其中奇异函数部分剥离为显式通过解析式计算，非奇异部分用数值积分，从而对高阶边界元几乎强奇异和超奇异积分建立一个通用的半解析算法.

1 二维弹性力学边界积分方程中几乎奇异积分问题

对于线弹性力学问题，区域 Ω 内点 $\boldsymbol{y}$ 处位移 $u_i(\boldsymbol{y})$ 和应力 $\sigma_{ik}(\boldsymbol{y})$ 可由边界位移分量 $u_j(\boldsymbol{x})$ 和面力分量 $t_j(\boldsymbol{x})$ 的积分形式表达

$$u_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma [U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})t_j(\boldsymbol{x}) - T^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\Gamma(\boldsymbol{x}) + \int_\Omega U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, b_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

$$\sigma_{ik}(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma W^*_{ikj}t_j\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma S^*_{ikj}u_j\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega W^*_{ikj}b_j\mathrm{d}\Omega, \quad \boldsymbol{y}\in\Omega \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{y}$ 称为源点，$\boldsymbol{x}$ 为场点，$\Gamma = \partial\Omega$，$b_j(\boldsymbol{x})$ 为体力. 积分核中 $U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$T^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$W^*_{ikj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$S^*_{ikj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为弹性力学问题基本解，对平面应变问题

$$U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -c_1(c_2\ln r\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}) \tag{3a}$$

$$T^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = c_3\frac{1}{r}[c_4(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) - r_{,n}(c_4\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j})] \tag{3b}$$

$$W^*_{ikj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = c_3\frac{1}{r}[c_4(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,i}\delta_{kj} - r_{,j}\delta_{ki}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} S^*_{ikj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = c_6\frac{1}{r^2}\big\{&2r_{,n}[c_4r_{,j}\delta_{ki} + \nu(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,k}\delta_{ij}) - \\ &4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + c_4(2r_{,i}r_{,k}n_j + \delta_{jk}n_i + \delta_{ij}n_k) + \\ &2\nu(r_{,i}r_{,j}n_k + r_{,j}r_{,k}n_i) - c_5\delta_{ki}n_j\big\} \end{aligned} \tag{4b}$$

式中，$i, j, k = 1, 2$，G 为剪切模量，ν 为泊松比，δ_{ij} 为符号算子，n_i 为边界单位法向量分量,

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G},\ c_2 = 3-4\nu,\ c_3 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \\ &c_4 = 1-2\nu,\ c_5 = 1-4\nu,\ c_6 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \\ &r_i = x_i - y_i,\ r = \sqrt{r_ir_i},\ r_{,i} = \partial r/\partial x_i = r_i/r \\ &r_{,n} = \partial r/\partial n = r_{,i}n_i,\ i, j = 1, 2\ (\text{下同}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

对于平面应力问题, 上式中 ν 换为 $\nu/(1+\nu)$ 即可. 当 $\boldsymbol{y}\in\Gamma$ 时，方程 (1) 表达为

$$C_{ij}(\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})t_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma - ⨍_\Gamma T^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega U^*_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})b_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega \tag{6}$$

式中，$C_{ij}(\boldsymbol{y})$ 称为奇性系数，$⨍(\cdots)\mathrm{d}\Gamma$ 称为柯西主值积分. 因为体力 b_j 引起的域积分不奇异，常规积分方法可以胜任，这儿略去体力项不考虑.

弹性力学边界元解法基于方程 (6) 沿边界离散和相应边界条件获得边界位移和面力分量，然后由积分方程 (1) 和 (2) 求得内点的位移和应力. 当源点 $\boldsymbol{y}$ 靠近边界时，反映在方程 (1)，(2) 和 (6) 中单元积分为几乎强奇异和超奇异性，采用常规高斯数值积分已失效. 本文以 3 节点二次单元为例建立适用于高阶单元几乎奇异积分的半解析方法.

2 二维问题二次边界单元几何特征

边界元法中 3 节点二次单元 Γ_e 见图 1，x_i^m 表示单元第 m 个节点的第 i 维坐标；$\boldsymbol{y}$ 的坐标 y_i，$\boldsymbol{x}$ 的坐标 x_i，这里 $i = 1,2$；$m = 1,2,3$. $\boldsymbol{y}$ 在单元 Γ_e 曲线上垂足为点 $\boldsymbol{x}_0$，将单元从 ox_1x_2 系变换到局部坐标系 $o\xi$，垂足 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $o\xi$ 系坐标为 ξ_0. Γ_e 上 $\boldsymbol{x}$ 坐标为

$$x_i(\xi) = \sum_{m=1}^{3} N_m(\xi)x_i^m = \frac{1}{2}(\xi-\xi_0)^2\Delta^2x_i + (\xi-\xi_0)x'_{i0} + x_{i0} \tag{7}$$

式中 $(\cdot)' = \mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}\xi$(下同)，

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1),\ N_2 = 1-\xi^2,\ N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \tag{8}$$

$$x_{i0} = \sum_{m=1}^{3} N_m(\xi_0)x_i^m,\ x'_{i0} = x'_i(\xi_0) = \sum_{m=1}^{3} N'_m(\xi_0)x_i^m \tag{9}$$

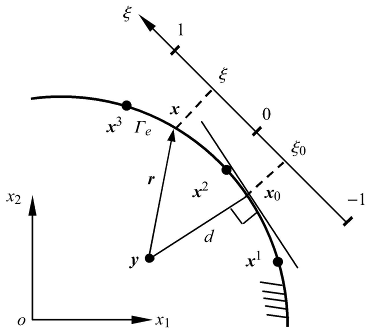

图 1 3 节点二次单元

Fig. 1 3-noded quadratic element

$$\Delta^2 x_i = x_i^1 - 2x_i^2 + x_i^3, \quad \Delta x_i = x_i^3 - x_i^1 \tag{10}$$

记

$$s = \sqrt{(x_i^3 - x_i^1)(x_i^3 - x_i^1)}$$

定义 s 为单元 $\varGamma_e$ 的特征长度. $\varGamma_e$ 在 ox_1x_2 坐标系到 $o\xi$ 坐标系变换关系的雅可比

$$J(\xi) = \sqrt{x_i'(\xi)x_i'(\xi)} \tag{11}$$

$J(\xi)$ 在 ξ_0 处可近似表达为

$$\hat{J}(\xi) \approx (\xi - \xi_0)J'(\xi_0) + J(\xi_0) \tag{12}$$

$$J(\xi_0) = \sqrt{x_{i0}'x_{i0}'}, \quad J'(\xi_0) = \frac{x_{i0}'\Delta^2 x_i}{J(\xi_0)} \tag{13}$$

$\varGamma_e$ 上外法向量 $\boldsymbol{n}$ 分量为

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{x_2'(\xi)}{J(\xi)} = \frac{(\xi-\xi_0)\Delta^2 x_2 + x_{20}'}{J(\xi)} \\ n_2 &= -\frac{x_1'(\xi)}{J(\xi)} = -\frac{(\xi-\xi_0)\Delta^2 x_1 + x_{10}'}{J(\xi)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

n_i 在 ξ_0 点的值为

$$n_{10} = \frac{x_{20}'}{J(\xi_0)}, \quad n_{20} = -\frac{x_{10}'}{J(\xi_0)}$$

记 d 为源点 $\boldsymbol{y}$ 与垂足点 $\boldsymbol{x}_0$ 之间的距离，见图 1

$$d = \sqrt{(x_{i0} - y_i)(x_{i0} - y_i)} \tag{15}$$

定义

$$e_1 = \frac{2d}{s} \tag{16}$$

e_1 为源点 $\boldsymbol{y}$ 到单元 $\varGamma_e$ 的最小相对距离，或称为接近度. $\boldsymbol{y}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$$

由式 (7), 得

$$r_i(\xi) = x_i - y_i = \frac{s}{2}[\alpha_i(\xi-\xi_0)^2 + \beta_i(\xi-\xi_0) + \gamma_i] \tag{17}$$

式中，$\alpha_i = \dfrac{1}{s}\Delta^2 x_i$，$\beta_i = \dfrac{2x_{i0}'}{s}$，$\gamma_i = 2\dfrac{x_{i0}-y_i}{s}$.

由式 (17), 得

$$r(\xi) = \sqrt{r_i r_i} = \frac{s}{2}[(\xi-\xi_0)^2 H(\xi) + e_1^2]^{1/2} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} H(\xi) = 1 + \frac{1}{s^2}\Delta^2 x_i[(\xi+\xi_0)^2\Delta^2 x_i + \\ 2(\xi+\xi_0)\Delta x_i + 4(x_{i0} - y_i)] \end{aligned} \tag{19}$$

在式 (17) 和式 (18) 中取近似

$$\left.\begin{aligned} \hat{r}_i(\xi) &= \frac{s}{2}[\beta_i(\xi-\xi_0) + \gamma_i] \\ \hat{r}(\xi) &= \frac{s}{2}[(\xi-\xi_0)^2 H_0 + e_1^2]^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中

$$H_0 = 1 + \frac{4}{s^2}\Delta^2 x_i(\xi_0^2\Delta^2 x_i + \xi_0\Delta x_i + x_{i0} - y_i) \tag{21}$$

由式 (5), (18), (20)，对 $r_{,i}$ 和 $r_{,n}$ 引入其近似表达式

$$\tilde{r}_{,i}(\xi) = \frac{r_i}{\hat{r}}, \quad \tilde{r}_{,n} = \frac{\tilde{r}_n}{\hat{r}}, \quad \tilde{r}_n = r_i n_{i0} \tag{22}$$

当源点 $\boldsymbol{y}$ 趋近单元 $\varGamma_e$ 但不在单元及其延长线上时，导致方程 (1), (2) 和 (6) 发生几乎奇异积分的原因是 r 中的接近度 $e_1 \to 0$.

3 3 节点二次单元几乎奇异积分半解析算法

二维弹性力学问题二次等参单元上边界位移和面力表达为

$$u_i(\xi) = \sum_{m=1}^{3} N_m(\xi)u_i^m, \quad t_i(\xi) = \sum_{m=1}^{3} N_m(\xi)t_i^m \tag{23}$$

式中 u_i^m 和 t_i^m 表示单元上第 m 个节点的位移和面力. 观察基本解 (3) 和 (4)，从中记如下函数

$$\tilde{U}_{ij}^{*0}(\xi) = -c_2\delta_{ij}, \quad \tilde{U}_{ij}^{*1}(\xi) = r_i r_j \tag{24a}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}^{*1}(\xi) &= -c_4(\tilde{r}_n\delta_{ij} + n_i r_j - n_j r_i) \\ \tilde{T}_{ij}^{*2}(\xi) &= -2\tilde{r}_n r_i r_j \end{aligned}\right\} \tag{24b}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{W}_{ikj}^{*1}(\xi) &= c_4(r_k\delta_{ij} + r_i\delta_{jk} - r_j\delta_{ik}) \\ \tilde{W}_{ikj}^{*2}(\xi) &= 2r_i r_j r_k \end{aligned}\right\} \tag{24c}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{S}_{ikj}^{*1}(\xi) &= c_4(n_k\delta_{ij} + n_i\delta_{jk}) - c_5 n_j\delta_{ik} \\ \tilde{S}_{ikj}^{*3}(\xi) &= -8\tilde{r}_n r_i r_j r_k \end{aligned}\right\} \tag{24d}$$

$$\tilde{S}^{*2}_{ikj}(\xi)=2\tilde{r}_n[c_4 r_j\delta_{ik}+\nu(r_k\delta_{ij}+r_i\delta_{jk})]+ 2\nu(n_ir_jr_k+n_kr_ir_j)+2c_4n_jr_ir_k \tag{24e}$$

因为奇异积分发生在垂足 ξ_0 附近，从式 (3) 和式 (4) 中提取基本的奇异部分，构建积分核中近似函数如下

$$U^*_{ij}t_j\approx c_1(\ln\hat{r}\tilde{U}^{*0}_{ij}+\frac{1}{\hat{r}^2}\tilde{U}^{*1}_{ij})t_j\hat{J}=\tilde{U}^*_{ij}t_j\hat{J} \tag{25a}$$

$$T^*_{ij}u_j\approx c_3(\frac{1}{\hat{r}^2}\tilde{T}^{*1}_{ij}+\frac{1}{\hat{r}^4}\tilde{T}^{*2}_{ij})u_jJ=\tilde{T}^*_{ij}u_jJ \tag{25b}$$

$$W^*_{ikj}t_j\approx c_3(\frac{1}{\hat{r}^2}\tilde{W}^{*1}_{ikj}+\frac{1}{\hat{r}^4}\tilde{W}^{*2}_{ikj})t_j\hat{J}=\tilde{W}^*_{ikj}t_j\hat{J} \tag{25c}$$

$$S^*_{ikj}u_j\approx c_6(\frac{1}{\hat{r}^2}\tilde{S}^{*1}_{ikj}+\frac{1}{\hat{r}^4}\tilde{S}^{*2}_{ikj}+\frac{1}{\hat{r}^6}\tilde{S}^{*3}_{ikj})u_jJ=\tilde{S}^*_{ikj}u_jJ \tag{25d}$$

沿边界上离散为 n 个单元，位移和应力积分方程 (1)~(2) 沿边界作单元积分，有

$$\left.\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{y})&=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Gamma_e}(U^*_{ij}t_j-T^*_{ij}u_j)\mathrm{d}\Gamma\\ \sigma_{ik}(\boldsymbol{y})&=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Gamma_e}(W^*_{ikj}t_j-S^*_{ikj}u_j)\mathrm{d}\Gamma \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

当 Γ_e 上积分发生几乎奇异性，这里提出对上式积分核加减其近似函数式 (25)，有

$$\int_{\Gamma_e}(U^*_{ij}t_j-T^*_{ij}u_j)\mathrm{d}\Gamma=\int_{-1}^{1}[(U^*_{ij}t_j-T^*_{ij}u_j)J- (\tilde{U}^*_{ij}t_j\hat{J}-\tilde{T}^*_{ij}u_jJ)]\mathrm{d}\xi+\int_{-1}^{1}(\tilde{U}^*_{ij}t_j\hat{J}-\tilde{T}^*_{ij}u_jJ)\mathrm{d}\xi \tag{27a}$$

$$\int_{\Gamma_e}(W^*_{ikj}t_j-S^*_{ikj}u_j)\mathrm{d}\Gamma=\int_{-1}^{1}[(W^*_{ikj}t_j-S^*_{ikj}u_j)J- (\tilde{W}^*_{ikj}t_j\hat{J}-\tilde{S}^*_{ikj}u_jJ)]\mathrm{d}\xi+\int_{-1}^{1}(\tilde{W}^*_{ikj}t_j\hat{J}-\tilde{S}^*_{ikj}u_jJ)\mathrm{d}\xi \tag{27b}$$

上式中等号右端第 1 项为规则函数积分，可以用常规高斯数值积分完成. 当源点到 Γ_e 的接近度 e_1 约小于 0.5 时，第 2 项积分式发生几乎奇异性，数值积分无法胜任，现建立其解析积分公式. 式 (25) 代入其第 2 项积分，有

$$\int_{-1}^{1}(\tilde{U}^*_{ij}t_j\hat{J}-\tilde{T}^*_{ij}u_jJ)\mathrm{d}\xi=\int_{-1}^{1}[c_1(\ln\hat{r}\tilde{U}^{*0}_{ij}+ \tilde{U}^{*1}_{ij}/\hat{r}^2)t_j\hat{J}-c_3(\tilde{T}^{*1}_{ij}/\hat{r}^2+\tilde{T}^{*2}_{ij}/\hat{r}^4)u_jJ]\mathrm{d}\xi \tag{28a}$$

$$\int_{-1}^{1}(\tilde{W}^*_{ikj}t_j\hat{J}-\tilde{S}^*_{ikj}u_jJ)\mathrm{d}\xi= \int_{-1}^{1}[c_3(\tilde{W}^{*1}_{ikj}/\hat{r}^2+\tilde{W}^{*2}_{ikj}/\hat{r}^4)t_j\hat{J}- c_6(\tilde{S}^{*1}_{ikj}/\hat{r}^2+\tilde{S}^{*2}_{ikj}/\hat{r}^4+\tilde{S}^{*3}_{ikj}/\hat{r}^6)u_jJ]\mathrm{d}\xi \tag{28b}$$

将式 (24) 代入式 (28)，变换到局部坐标系并引入式 (11) 和式 (22)，上式积分归纳为下列形式

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{P_1(\xi)}{\hat{r}^2}\mathrm{d}\xi,\ I_2=\int_{-1}^{1}\frac{P_2(\xi)}{\hat{r}^4}\mathrm{d}\xi,\ I_3=\int_{-1}^{1}\frac{P_3(\xi)}{\hat{r}^6}\mathrm{d}\xi \tag{29}$$

式中 $P_1(\xi), P_2(\xi), P_3(\xi)$ 均为 ξ 的多项式形式，由式 (20) 可见 $\hat{r}^2$ 为 ξ 的 2 次函数. 对上式反复作分部积分，经过一系列推导，建立如下解析积分公式

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{P_1(\xi)}{\hat{r}^2}\mathrm{d}\xi=\frac{4}{s^2H_0}\left\{\frac{\sqrt{H_0}}{e_1}g(z)P_1(\xi_0)+ \frac{1}{2}\ln(1+z^2)P_1'(\xi_0)+\frac{e_1}{2\sqrt{H_0}}(z-g)P_1''(\xi_0)+ \frac{e_1^2}{12H_0}[z^2-\ln(1+z^2)]P_1'''(\xi_0)\right\}\Bigg|_{\xi=-1}^{1} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}I_2=\int_{-1}^{1}\frac{P_2(\xi)}{\hat{r}^4}\mathrm{d}\xi=&\frac{1}{s^4H_0^2}\Big\{8\Big[g(z)+ \frac{1}{1+z^2}\Big]\frac{H_0\sqrt{H_0}}{e_1^3}P_2(\xi_0)-\frac{8}{1+z^2}\frac{H_0}{e_1^2}P_2'(\xi_0)+\\ &\Big[g(z)-\frac{1}{1+z^2}\Big]\frac{4\sqrt{H_0}}{e_1}P_2''(\xi_0)+ \frac{4}{3}\Big[\frac{1}{1+z^2}+\ln(1+z^2)\Big]P_2'''(\xi_0)+\frac{e_1}{\sqrt{H_0}}\Big[\frac{2}{3}z-\\ &g(z)+\frac{z}{3(1+z^2)}\Big]P_2^{(4)}(\xi_0)\Big\}\Big|_{\xi=-1}^{1}\end{aligned} \tag{30b}$$

$$\begin{aligned}I_3=\int_{-1}^{1}\frac{P_3(\xi)}{\hat{r}^6}\mathrm{d}\xi=&\frac{1}{s^6H_0^3}\Big\{\Big[24g(z)+ \frac{8z}{1+z^2}\Big(\frac{2}{1+z^2}+3\Big)\Big]\frac{H_0^2\sqrt{H_0}}{e_1^5}P_3(\xi_0)-\\ &\frac{16}{(1+z^2)^2}\frac{H_0^2}{e_1^4}P_3'(\xi_0)+4\Big[\frac{z}{1+z^2}\Big(1-\frac{2}{1+z^2}\Big)+g\Big]\cdot \frac{H_0\sqrt{H_0}}{e_1^3}P_3''(\xi_0)+\frac{8}{3(1+z^2)}\Big(\frac{1}{1+z^2}-2\Big)\frac{H_0}{e_1^2}P_3'''(\xi_0)+\\ &\Big[\frac{z}{3(1+z^2)}\Big(\frac{2}{1+z^2}-5\Big)+g\Big]\frac{\sqrt{H_0}}{e_1}P_3^{(4)}(\xi_0)+ \frac{4}{15}\Big[\ln(1+z^2)+\frac{2}{1+z^2}-\frac{1}{2(1+z^2)^2}\Big]P_3^{(5)}(\xi_0)+\\ &\frac{e_1}{18\sqrt{H_0}}\Big[3z-3g-\frac{2z^5}{5(1+z^2)^2}-\frac{z^3}{1+z^2}\Big]P_3^{(6)}(\xi_0)\Big\}\Big|_{\xi=-1}^{1}\end{aligned} \tag{30c}$$

式中 $z=\sqrt{H_0}(\xi-\xi_0)/e_1$，$g(z)=\arctan z$. 注意到式 (28b) 包含积分式 I_3，具有几乎超奇异性积分. 观察上述各积分式，至少最后一项当 $e_1\to 0$ 时均趋于 0，即不奇异，因此不必考虑多项式 $P_i(\xi)\ (i=0,1,2,3)$ 中

后续高阶项. 导致积分 I_i 几乎奇异性的接近度 e_1 已由上式解析表达出，其解析结果代入式 (27)，然后用常规高斯数值积分计算式 (27) 等号右端第 1 项规则积分，即建立了单元 Γ_e 上几乎强奇异和超奇异积分的半解析新算法.

4 数值算例

本节算例均按照平面应力问题作边界元分析，其中所采用 3 节点二次等参元上几乎奇异积分是使用上节建立的半解析法计算，非奇异积分部分使用 8 点高斯积分计算；2 节点线性单元几乎奇异积分采用文献 [7] 的正则化解析法计算. 如果例中物理量没有单位，均假设各个物理量单位是相容的.

例 1　纯弯曲深梁, 见图 2, 梁厚度 $h = 1$ cm，载荷 $p = 10^4$ N/cm, 弹性模量 $E = 192$ GPa，泊松比 $\nu = 0.2$.

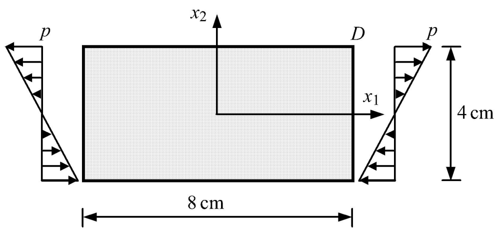

图 2　纯弯曲梁

Fig. 2　The bending beam

由于结构对称性，取梁右半部分划分 2 种边界元网格，见图 3 所示：(1) 线性单元：首先布置 64 个均匀单元，然后在 D 点邻近分 2 次增加节点，每次增加 2 个，总计 68 个节点构成 68 个单元. (2) 二次单元：每条边划分 1 个二次单元，共计 8 个节点构成 4 个二次单元.

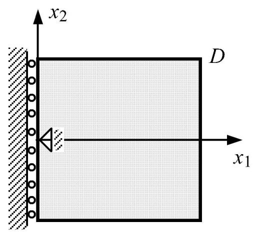

图 3　计算模型

Fig.3　The computed model

深梁弯曲的应力场按照网格 (1) 和 (2) 分别作边界元分析，表 1 和表 2 分别给出梁角点 D 附近内点的位移 u_1 和应力 σ_{11}. 结果表明线性元 (采用了解析法 [7]) 计算位移时的有效接近度 e_1 为 5.0×10^{-5}，本文二次元算法在接近度大于 4.4×10^{-16} 范围内计算结果与精确解完全吻合；计算应力时线性元解的有效接近度为 5.0×10^{-5}，本文算法解的有效接近度为 5.0×10^{-15}. 本文二次元算法较线性元算法在计算位移和应力时，接近度降低 10 个数量级. 注意这里线性元使用了 68 个边界节点计算，而本文二次等参元仅用了 8 个节点，因此二次等参元半解析算法比线性元解析算法可以计算更近的内点物理量，且计算效率更高.

例 2　中心开孔方板受单向拉伸. 板长为 $2L = 60$，板厚 $h = 1$，弹性模量 $E = 21$，泊松比 $\nu = 0.3$，单向拉力 $p = 10$，见图 4. 椭圆孔的长短半轴分别为 b 和 a, 分 2 种情形：(1) 圆孔：$a = 1$，$b = 1$；(2) 椭圆孔：$a = 1$，$b = 2$.

表 1　弯曲梁角点 D 附近内点位移 $u_1(10^{-2}$ cm)

Table 1　The displacement $u_1(10^{-2}$ cm) near corner point D of the bending beam

Points		Exact solution	Linear BE	Present quadratic BE	Relative distance e_1
x_1/cm	x_2/cm				
3.999	1.999 00	0.208 229	0.207 469	0.208 229	5.00×10^{-4}
3.999 9	1.999 90	0.208 323	0.207 601	0.208 322	5.00×10^{-5}
3.999 99	1.999 99	0.208 332	—	0.208 332	5.00×10^{-6}
3.999 999	1.999 999	0.208 333	—	0.208 333	5.00×10^{-7}
3.999 999 99	1.999 999 99	0.208 333	—	0.208 333	5.00×10^{-9}
3.999 999 999 9	1.999 999 999 9	0.208 333	—	0.208 333	5.00×10^{-11}
3.999 999 999 999	1.999 999 999 999	0.208 333	—	0.208 333	5.00×10^{-13}
3.999 999 999 999 99	1.999 999 999 999 99	0.208 333	—	0.208 333	5.00×10^{-15}
3.999 999 999 999 999	1.999 999 999 999 999	0.208 333	—	0.208 333	4.44×10^{-16}

表 2 弯曲梁角点 D 附近内点应力 σ_{11} (N/cm^2)

Table 2 The stress σ_{11} (N/cm^2) near corner point D of the bending beam

Points		Exact solution	Linear BE	Present quadratic BE	Relative distance e_1
x_1/cm	x_2/cm				
3.999	1.999 00	9 995.00	9 990.84	9 995.697 700	5.00×10^{-4}
3.999 9	1.999 90	9 999.50	10 029.3	9 999.571 200	5.00×10^{-5}
3.999 99	1.999 99	9 999.95	—	9 999.956 900	5.00×10^{-6}
3.999 999	1.999 999	9 999.995	—	9 999.955 200	5.00×10^{-7}
3.999 999 99	1.999 999 99	9 999.999 95	—	10 000.001 00	5.00×10^{-9}
3.999 999 999 9	1.999 999 999 9	10 000.00	—	10 000.007 00	5.00×10^{-11}
3.999 999 999 999	1.999 999 999 999	10 000.00	—	10 009.429 00	5.00×10^{-13}
3.999 999 999 999 9	1.999 999 999 999 9	10 000.00	—	10 027.929 00	5.00×10^{-14}
3.999 999 999 999 99	1.999 999 999 999 99	10 000.00	—	10 235.929 00	5.00×10^{-15}
3.999 999 999 999 999	1.999 999 999 999 999	10 000.00	—	8 123.928 800	4.44×10^{-16}

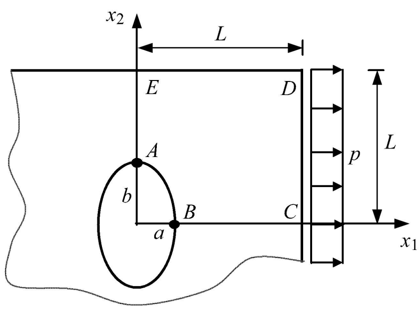

图 4 中心开孔单向拉伸方板

Fig.4 A tension square plate with a central hole

考虑结构对称性，取 1/4 边界布置单元. CD 段和 DE 段各划分 2 个二次单元，AB 弧段单元按照如下 2 种方式划分：对圆孔边首先划分 8 个均匀二次单元；对椭圆孔边首先按等角度划分 16 个二次单元.

Mesh-1: 在上述 AB 弧段单元划分基础上，将 A 点邻近处 1 个二次元拆分为 2 个二次元；

Mesh-2: 在 Mesh-1 基础上，再次将 A 点邻近处 1 个二次元拆分为 2 个二次元.

方板开孔后，孔边 $A(0, b)$ 点处发生应力集中，附近区域应力梯度变化剧烈而难以准确计算. 这里按照 Mesh-1 和 Mesh-2 分别作边界元分析，A 点邻近处内点位移 u_2 和应力 σ_{11} 计算结果见表 3 ~ 表 6，并与解析解、常规边界元解、边界元线性元解析法解 [7] 作了对比，其中线性元网格是将 1 个二次元分为 2 个线性元，常规边界元解是对二次元上几乎奇异积分直接用高斯数值求解，解析解是无限大板开孔的弹性力学解. 表 3 ~ 表 6 中最后一行结果来自边界元分析在边界点 A 的解，作为 A 点邻近处的参照值.

表 3 圆孔边 $A(0, b)$ 点处近边界内点位移 $u_2(a = 1, b = 1)$

Table 3 The displacement u_2 near point $A(0, b)$ of the plate with a circular hole ($a = 1, b = 1$)

Points $x_2(x_1 = 0)$	Analytic solution	Conventional BEM	Linear BE[7]		Present quadratic BE		Relative distance e_1
		Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1
1.004	−0.477 89	−0.473 31	−0.481 30	−0.481 79	−0.480 20	−0.480 22	8.15×10^{-2}
1.002	−0.477 04	—	−0.480 44	−0.480 93	−0.479 41	−0.479 37	4.08×10^{-2}
1.000 05	−0.476 21	—	−0.479 38	−0.480 01	−0.478 53	−0.478 53	1.02×10^{-3}
1.000 01	−0.476 19	—	−0.479 34	−0.479 97	−0.478 52	−0.478 52	2.04×10^{-4}
1.000 001	−0.476 19	—	−0.479 12	−0.479 53	−0.478 52	−0.478 52	2.04×10^{-5}
1.000 000 1	−0.476 19	—	−0.479 04	−0.479 13	−0.478 52	−0.478 52	2.04×10^{-6}
1.000 000 01	−0.476 19	—	—	—	−0.478 52	−0.478 52	2.04×10^{-7}
1.000 000 000 01	−0.476 19	—	—	—	−0.478 52	−0.478 52	2.04×10^{-10}
1.000 000 000 001	−0.476 19	—	—	—	−0.478 52	−0.478 54	2.04×10^{-11}
1.000 000 000 000 01	−0.476 19	—	—	—	−0.477 63	−0.478 10	2.04×10^{-13}
1.000 000 000 000 001	−0.476 19	—	—	—	−0.469 95	−0.492 85	2.26×10^{-14}
1.000 000 000 000 000 1	−0.476 19	—	—	—	−0.239 26	−0.239 26	1.41×10^{-16}
1.000 00	−0.476 19	−0.480 05	−0.479 51	−0.480 05	−0.478 52	−0.478 52	

表 4 圆孔边 $A(0,b)$ 点处近边界内点应力 $\sigma_{11}(a=1,b=1)$

Table 4 The stress σ_{11} near point $A(0,b)$ of the plate with a circular hole ($a=1,b=1$)

Points $x_2(x_1=0)$	Analytic solution	Conventional BEM	Linear BE [7]		Present quadratic BE		Relative distance e_1
		Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1
1.01	29.365 20	25.786 01	29.900 55	29.843 72	29.407 60	29.400 45	2.04×10^{-1}
1.004	29.722 62	—	30.827 61	30.451 33	29.757 90	29.807 39	8.15×10^{-2}
1.002	29.860 66	—	31.437 29	30.800 42	30.007 12	29.953 30	4.08×10^{-2}
1.000 3	29.979 01	—	32.977 36	31.610 37	29.847 91	30.118 86	6.11×10^{-3}
1.000 05	29.996 50	—	34.339 07	32.344 72	30.041 30	30.035 25	1.02×10^{-3}
1.000 03	29.997 90	—	33.703 51	32.635 26	30.124 40	30.050 32	6.11×10^{-4}
1.000 02	29.998 60	—	—	33.240 51	30.190 91	30.065 06	4.08×10^{-4}
1.000 01	29.999 30	—	—	—	30.304 66	30.092 01	2.04×10^{-4}
1.000 001	29.999 93	—	—	—	30.680 66	30.183 14	2.04×10^{-5}
1.000 000 1	29.999 99	—	—	—	31.061 46	30.305 52	2.04×10^{-6}
1.000 000 01	30.000 00	—	—	—	30.949 68	29.561 10	2.04×10^{-7}
1.000 000 001	30.000 00	—	—	—	−218.063	−244.692	2.04×10^{-8}
1.000 00	30.000 00	30.470 97	30.128 13	30.470 97	30.088 00	30.088 00	

表 5 椭圆孔边 $A(0,b)$ 点处近边界内点位移 $u_2(a=1,b=2)$

Table 5 The displacement u_2 near point $A(0,b)$ of the plate with an elliptic hole ($a=1,b=2$)

Points $x_2(x_1=0)$	Conventional BEM		Linear BE [7]		Present quadratic BE		Relative distance e_1
	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1
2.004	−0.951 09	−0.997 80	−0.970 36	−0.970 73	−0.969 75	−0.969 76	1.63×10^{-1}
2.002	—	−0.951 55	−0.968 94	−0.969 33	−0.968 35	−0.968 36	8.14×10^{-2}
2.001	—	—	−0.968 21	−0.968 61	−0.967 72	−0.967 65	4.07×10^{-2}
2.000 1	—	—	−0.967 43	−0.967 92	−0.966 98	−0.967 00	4.07×10^{-3}
2.000 02	—	—	−0.967 30	−0.967 82	−0.966 95	−0.966 95	8.14×10^{-4}
2.000 005			−0.967 12	−0.967 34	−0.966 94	−0.966 94	2.04×10^{-4}
2.000 000 1	—	—	−0.967 03	−0.967 12	−0.966 94	−0.966 94	4.07×10^{-6}
2.000 000 01	—	—	—	—	−0.966 94	−0.966 94	4.07×10^{-7}
2.000 000 000 01	—	—	—	—	−0.966 94	−0.966 94	4.07×10^{-10}
2.000 000 000 001	—	—	—	—	−0.966 94	−0.966 95	4.07×10^{-11}
2.000 000 000 000 1	—	—	—	—	−0.96692	−0.96705	4.07×10^{-12}
2.000 000 000 000 01	—	—	—	—	−0.966 67	−0.967 96	4.16×10^{-13}
2.000 000 000 000 001	—	—	—	—	−0.963 80	−0.926 99	3.62×10^{-14}
2.000 000 000 000 000 1	—	—	—	—	−0.483 47	−0.483 47	2.82×10^{-16}
2.000 00	−0.967 42	−0.967 86	−0.967 42	−0.967 86	−0.966 94	−0.966 94	

当方板开圆孔时，表 3 和表 4 结果表明线性单元线性元解析法 [7] 可以计算接近度 e_1 大于 2.04×10^{-6} 的近边界点位移 u_2 和 e_1 大于 4.08×10^{-4} 的近边界点应力 σ_{11}，但 σ_{11} 计算结果误差较大，在 e_1 为 4.08×10^{-4} 的内点，局部加密 Mesh-2 的 σ_{11} 计算结果相对误差为 10.8%. 本文二次元算法大约可以计算接近度大于 2.04×10^{-13} 的近边界点位移和 e_1 大于 2.04×10^{-7} 的近边界点应力，在 e_1 为 2.04×10^{-7} 的内点，Mesh-1 的应力 σ_{11} 计算结果相对误差为 3.16%，加密网格 Mesh-2 的应力 σ_{11} 计算结果相对误差为 1.46%，明显优于线性单元解析算法.

表 6 椭圆孔边 $A(0,b)$ 点处近边界内点应力 $\sigma_{11}(a=1,b=2)$

Table 6 The stress σ_{11} near point $A(0,b)$ of the plate with an elliptic hole $(a=1,b=2)$

Points $x_2(x_1=0)$	Conventional BEM		Linear BE[7]		Present quadratic BE		Relative distance e_1
	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-1
2.02	45.712 56	46.937 81	46.537 63	46.937 81	46.379 01	46.376 32	3.21
2.01	—	47.665 70	48.685 75	48.870 70	48.316 52	48.323 65	4.07×10^{-1}
2.005	—	—	50.147 73	50.039 19	49.362 93	49.354 19	2.04×10^{-1}
2.001	—	—	52.613 36	51.566 00	50.288 46	50.202 03	4.07×10^{-2}
2.000 5	—	—	53.539 18	52.062 71	50.473 30	50.330 60	2.04×10^{-2}
2.000 1	—	—	55.608 83	53.127 62	50.191 98	50.379 69	4.07×10^{-3}
2.000 05	—	—	—	53.572 76	50.278 03	50.373 23	2.04×10^{-3}
2.000 02	—	—	—	54.032 99	50.426 56	50.403 46	8.14×10^{-4}
2.000 01	—	—	—	—	50.542 53	50.432 95	4.07×10^{-4}
2.000 001	—	—	—	—	50.924 73	50.625 07	4.07×10^{-5}
2.000 000 1	—	—	—	—	51.286 70	50.639 82	4.07×10^{-6}
2.000 000 01	—	—	—	—	51.647 30	52.637 82	4.07×10^{-7}
2.000 000 001	—	—	—	—	31.506 46	85.986 57	4.07×10^{-8}
2.000 00	50.472 19	51.027 49	50.472 19	51.027 49	50.440 00	50.440 00	

当方板开椭圆孔时，$A(0,b)$ 点处环向应力解析解 $\sigma_{11}=50$. 从表 5 和表 6 可以看出线性元正则化算法计算内点位移 u_2 时的有效接近度 e_1 约为 2.04×10^{-6}，计算内点应力 σ_{11} 时的有效接近度约为 8.14×10^{-4}，本文二次元算法计算位移的有效接近度达到 4.16×10^{-13}，计算应力的 e_1 达到 4.07×10^{-7}，较线性元分别降低 7 个数量级和 3 个数量级.

表 3 中本文的内点位移 u_2 计算结果在有效接近度范围内与精确解比较，存在一个大约为 0.489% 的恒定相对误差. 从表 3 最后一行可以看出，该误差来源于边界点计算结果的误差，不是用本文算法计算内点位移时产生的. 表 4 ~ 表 6 中本文算法结果也存在同样的继承误差. 表 3 ~ 表 6 中内点 u_2 和 σ_{11} 计算结果同各个表格最后一行边界参照值吻合的很好，如果边界值计算精度提高，本文算法计算结果的精度也相应提高. 另外，比较 Mesh-1 与 Mesh-2 这 2 种网格的计算结果可以看出，线性单元正则化算法受网格疏密影响较大，尤其应力结果更显著，加密网格 Mesh-2 比 Mesh-1 的计算精度有提高；而网格疏密对二次元的算法有影响，但不敏感.

例 3 不同材料的双层圆环受均布内压 p 作用，见图 5，$p=1$，外半径 a_1 在 10.000 000 000 000 1~10.1 之间变化，外圆环内半径 $b_1=10$，厚度 $h_1=a_1-b_1$，弹性模量 $E_1=590\times10^9$，泊松比 $\nu_1=0.25$；内圆环的内半径 $b_2=9$，外半径 $a_2=10$，弹性模量

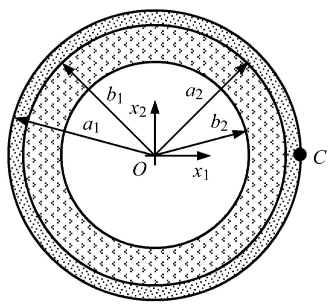

图 5 受内压双层圆环

Fig. 5 Two layer circular hoop subjected to the internal pressure

$E_2=210\times10^9$，泊松比 $\nu_2=0.28$.

内环厚度 $h_2=1$，外环厚度 h_1 变化是非常薄的，可模拟涂层结构，通常的数值方法难以分析. 定义 h_1/h_2 为狭长比，用边界元分析不同狭长比时双层圆环的应力场. 将双层圆环分两个域，外圆环为域 1，内圆环为域 2，所有边界用 3 节点二次等参元均匀离散，其中域 1 内外边界各划分 64 个单元，域 2 内外边界各划分 64 个单元，共计 256 个单元. 由于狭长比非常小，边界元法求解边界位移和面力时遇到几乎强奇异积分，这里用上节建立的半解析法计算，表 7 和表 8 分别给出了边界点 $C(a_1,0)$ 的径向位移 u_r 和环向应力 σ_θ 的计算结果. 这里 BEM 线性元结果是将每个 3 节点二次元细分为 4 个线性单元，并采用线性单元几乎奇异积分的解析公式 [7] 计算的，

线性元使用的节点数比二次元多. 表中边界元法结果的相对误差按下式计算

$$\text{Error} = \left|\frac{\text{边界元} - \text{解析解}}{\text{解析解}}\right| \times 100\,\%$$

表 7 可见，边界元线性元计算位移 u_r 结果在狭长比为 1×10^{-6} 时开始产生误差，狭长比为 1×10^{-7} 时已失效；本文边界元二次元计算位移 u_r 结果在狭长比为 1×10^{-10} 时仍有很高精度, 在狭长比为 1×10^{-11} 时产生误差为 1.28%. 表 8 中应力 σ_θ 结果显示，边界元线性元计算值在狭长比为 1×10^{-7} 时误差增大，狭长比为 1×10^{-8} 时失效；本文边界元二次元计算值在狭长比为 1×10^{-11} 时精度仍很高，此时最小接近度 e_1 约为 2.0×10^{-11}, 狭长比为 1×10^{-12} 时的误差为 6.8%. 可见采用正则化的边界元二次元比线性元计算薄壁结构的接近度减小了 5 个数量级，事实上，狭长比为 1×10^{-9} 的壁厚已是纳观尺度.

用有限元软件 ANSYS 分析该例作为对照，对应狭长比 0.1, 0.01, 0.001 的有限元法分别用 93, 1 180, 2 770 个 4 节点四边形等参元，其计算结果见表 7 和表 8. 有限元法分析薄层圆环时，随着狭长比变小需要的单元数比本文边界元法显著增多，计算耗时长. 当狭长比小于等于 1×10^{-4} 时，外圆环之薄超过了有限元软件对几何的容差识别极限，以致无力计算. 可见，边界元法分析薄体结构比有限元法具有显著优势，即使正则化的线性边界元分析也比有限元高效.

表 7　受内压双层圆环的边界点 C 径向位移 $u_r/(10^{-4})$

Table 7　The radial displacement $u_r/(10^{-4})$ at edge point C of the circular hoop subjected to the inner pressure

h_1/h_2	a_1	Exact solution	FEM	Linear BE	Present quadratic BE	Error of quadratic BE/%
1×10^{-1}	10.1	3.219 71	3.211 6	3.200 16	3.223 42	0.115 23
1×10^{-2}	10.01	3.956 43	3.941 6	3.942 11	3.958 22	0.045 24
1×10^{-3}	10.001	4.049 53	4.038 4	4.040 06	4.049 06	0.011 61
1×10^{-4}	10.000 1	4.059 09	—	4.050 57	4.058 89	0.004 93
1×10^{-5}	10.000 01	4.060 04	—	4.051 51	4.059 93	0.002 71
1×10^{-6}	10.000 001	4.060 14	—	4.089 62	4.060 04	0.002 46
1×10^{-7}	10.000 000 1	4.060 15	—	9.026 25	4.060 05	0.002 46
1×10^{-8}	10.000 000 01	4.060 15	—	—	4.059 99	0.003 94
1×10^{-9}	10.000 000 001	4.060 15	—	—	4.060 42	0.006 65
1×10^{-10}	10.000 000 000 1	4.060 15	—	—	4.060 98	0.020 44
1×10^{-11}	10.000 000 000 01	4.060 15	—	—	4.008 34	1.276 06
1×10^{-12}	10.000 000 000 001	4.060 15	—	—	4.822 94	18.787 24
1×10^{-13}	10.000 000 000 000 1	4.060 15	—	—	3.023 36	25.535 76

表 8　受内压双层圆环边界点 C 的环向应力 σ_θ

Table 8　The circumferential stress σ_θ at edge point C of the circular hoop subjected to the inner pressure

h_1/h_2	a_1	Exact solution	FEM	Linear BE	Present quadratic BE	Error of quadratic BE/%
1×10^{-1}	10.1	18.808	18.829	18.694	18.814	0.030 7
1×10^{-2}	10.01	23.320	23.303	23.235	23.332	0.053 1
1×10^{-3}	10.001	23.890	23.875	23.834	23.889	0.003 5
1×10^{-4}	10.000 1	23.948	—	23.898	23.948	0.001 5
1×10^{-5}	10.000 01	23.954	—	23.904	23.954	0.001 0
1×10^{-6}	10.000 001	23.955	—	23.988	23.954	0.003 4
1×10^{-7}	10.000 000 1	23.955	—	29.949	23.954	0.003 7
1×10^{-8}	10.000 000 01	23.955	—	—	23.954	0.003 7
1×10^{-9}	10.000 000 001	23.955	—	—	23.954	0.003 7
1×10^{-10}	10.000 000 000 1	23.955	—	—	23.951	0.016 2
1×10^{-11}	10.000 000 000 01	23.955	—	—	23.907	0.199 9
1×10^{-12}	10.000 000 000 001	23.955	—	—	25.595	6.846 7
1×10^{-13}	10.000 000 000 000 1	23.955	—	—	25.050	4.571 6

5 结 论

针对边界元法中高阶单元中几乎奇异积分计算难题，本文解剖了二维边界元法 3 节点二次单元的几何特征，表征出弹性力学高阶单元上几乎奇异积分问题列式. 对弹性力学边界元法中几乎奇异积分单元的奇异性函数提出用近似奇异函数逼近，从而分离出积分核中主导的奇异函数部分. 然后对几乎奇异积分核通过减一项和加一项将积分函数变换为规则函数和奇异函数两项积分之和. 规则核函数用常规高斯数值积分，对奇异核函数积分推导出解析公式，建立了一种新的半解析算法，可以胜任高阶边界单元上几乎强奇异和超奇异积分计算.

文中给出 3 个典型算例，采用二次边界元计算了薄体结构和近边界点位移/应力, 并与线性边界元几乎奇异积分解析算法结果作了比较，结果证明本文二次元的半解析算法更加高效. 特别是分析薄体结构，采用解析算法的线性边界元分析比有限元有显著优势，而用本文半解析算法的二次边界元分析比线性元的有效接近度至少减小了 4 个量级.

参 考 文 献

1 Luo JF, Liu YJ, Berger EJ. Analysis of two-dimensional thin structures (from micro- to nano-scales) using the boundary element method. *Computational Mechanics*, 1998, 22: 402-412

2 Ma H, Kamiya N. Domain supplemental approach to avoid boundary layer effect of BEM in elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23: 281-284

3 Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, 25: 901-922

4 Padhi GS, Shenoi RA, Moy SS, et al. Analytic integration of kernel shape function product integrals in the boundary element method. *Computers and Structures*, 2001, 79: 1325-1333

5 Shhiah YC, Shi YX. Heat conduction across thermal barrier coatings of anisotropic substrates. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2006, 33: 827-835

6 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 三维边界元法中几乎奇异积分的正则化算法. 力学学报, 2004, 26(1): 49-56 (Niu Zhongrong, Wang Xiuxi, Zhou Huanlin. A regularization algorithm for the nearly singular integrals in 3-D BEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 26(1): 49-56 (in Chinese))

7 Niu ZR, Cheng CZ, Zhou HL, et al. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31: 949-964

8 Zhou HL, Niu ZR, Cheng CZ, et al. Analytical integral algorithm applied to boundary layer effect and thin body effect in BEM for anisotropic potential problems. *Computers* & *Structures*, 2008, 86(15-16): 1656-1671

9 张耀明, 孙翠莲, 谷岩. 边界积分方程中近奇异积分计算的一种变量替换法. 力学学报，2008，40(2): 207-214 (Zhang Yaoming, Sun Cuilian, Gu Yan. The evaluation of nearly singular integrals in the boundary integral equations with variable transformation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008，40(2): 207-214 (in Chinese))

10 Dehghan M, Hosseinzadeh H. Calculation of 2D singular and near singular integrals of boundary elements method on complex space C. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36: 545-560

11 张耀明，谷岩，陈正宗. 位势边界元法中边界层效应与薄体结构. 力学学报，2010，42(2): 219-227 (Zhang Yaoming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Boundary layer effect and thin body structure in BEM for potential problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010，42(2): 219-227 (in Chinese))

12 Zhang YM, Qu WZ, Chen JT. BEM analysis of thin structures for thermoelastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37: 441-452

13 Nintcheu FS. Semi-analytic treatment of nearly-singular Galerkin surface integral. *Applied Numerical Mathematics*, 2010, 60: 974-993

14 Xie GZ, Zhang JM, Qin XY, et al. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 2D boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35: 811-817

15 Qin XY, Zhang JM, Xie GZ, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular integrals on 3D boundary element. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235: 4174-4186

(责任编辑: 刘希国)

A NEW SEMI-ANALYTIC ALGORITHM OF NEARLY SINGULAR INTEGRALS IN HIGH ORDER BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF 2D ELASTICITY [1)]

Niu Zhongrong[2)] Hu Zongjun Ge Renyu Cheng Changzheng
(*School of Civil Engineering*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *China*)

Abstract The calculation of the nearly singular integrals on high order elements is difficult in boundary element method (BEM) at present. In this paper, a new semi-analytic algorithm is established to deal with the nearly strongly singular and hyper-singular integrals for high order elements in two dimensional (2D) BEM. By analyzing the geometric feature of high order elements by local coordinates, the relative distance from a source point to the element is defined. For the nearly singular integrals of the high order elements, the leading singular part of the integral kernel function is separated into the explicit formulation by a series of deduction. Then the nearly singular integrals on the high order elements close to the source point are transformed to both the non-singular part and singular part by the subtraction, where the former is computed by the numerical quadrature and the later is evaluated by the analytic algorithm. Consequently, the quadratic element with the new semi-analytic algorithm was applied to calculate the displacements and stresses very close to the boundary and thin-walled structures in the boundary element analysis of 2D elasticity. Three examples were given to demonstrate that the computed results of the quadratic element with the semi-analytic algorithm are more accurate than those of the linear element with the analytic algorithm for the nearly singular integrals. In fact, the boundary element analysis with the linear element has been greatly more advantageous compared with the finite element method in analyzing the thin bodies.

Key words elasticity, BEM, high order element, nearly singular integrals, semi-analytic method

Received 3 July 2013, revised 1 August 2013.
1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11272111,11102056).
2) Niu Zhongrong, professor, research interests: computational mechanics. E-mail：niu-zr@hfut.edu.cn