

基于 PCE 方法的翼型不确定性分析及稳健设计

赵轲^{*1)} 高正红^{*} 黄江涛^{*†} 李静^{*}

^{*}(西北工业大学翼型叶栅空气动力学国防科技重点实验室, 西安 710072)

[†](中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000)

摘要 由于能够获得一个既经济又对参数变化不敏感的设计结果, 稳健型设计在工程设计中备受关注. 不确定性分析是稳健型设计的关键. 因此研究了基于混沌多项式的不确定性分析方法, 并将其与 CFD 方法结合, 对计算空气动力学设计中的不确定性影响进行了量化分析. 首先以 RAE2822 翼型为算例, 对其跨音速马赫数不确定影响进行了分析, 研究了多项式阶次对计算的影响, 分析了平均流场和方差. 接着结合超临界翼型的马赫数稳健型设计验证了混沌多项式方法在稳健型设计中的有效性. 优化结果表明, 稳健型优化后的翼型阻力系数明显降低, 同时对于马赫数的敏感性显著减小. 通过分析表明混沌多项式方法能够大幅提高稳健型优化设计效率, 能很好地应用于气动稳定性设计.

关键词 稳健型设计, NSGA-II, 混沌多项式, 埃尔米特多项式, 不确定性分析

中图分类号: V211.3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-127

引言

现实中, 工程设计和产品制造过程以及使用环境客观存在着大量不确定性因素, 传统的优化设计模型中, 设计变量、目标函数和约束函数均为确定性的, 不能够反映不确定因素对设计方案的影响, 使得确定性优化设计的最优解可能对于这些不确定性因素非常敏感. 因此人们提出了稳健型优化设计, 其基本思想是在不消除、不减少不确定性因素的情况下, 通过设计优化使不确定性因素对产品质量的影响尽可能小, 从而提高产品质量、降低产品成本^[1-3]. 与传统的确定性优化问题相比, 稳健型优化的一个显著特点是在优化过程中需要不断地进行不确定性分析, 采用优化方法减小设计目标对不确定性因素的依赖程度, 使设计结果对不确定性因素变得不敏感.

不确定性的分析, 即分析计算由随机变量引起的系统不确定性响应, 是稳健型优化设计的关键. Monte Carlo 模拟方法是一种最简单的评估方法, 可以很方便地计算响应量的概率分布, 而且预测精度比较高, 常被用来进行不确定性分析, 但是对于 Monte Carlo 随机模拟, 当样本点的数量至少为 10^{N+2} 时, 响应量的期望概率水平才能达到 10^{-N} 的要求^[4]. 拉丁超立方抽样技术改进了 Monte Carlo 方法, 提高

了分析效率, 但是仍然需要进行大量的分析计算^[5]. 近年来, 人们开发了一种在精度和计算效率上具有明显优势的不确定分析方法——混沌多项式展开, 并逐渐被应用于不确定性分析.

混沌多项式展开 (polynomial chaos expansion, PCE) 是一种非常严密的不确定分析方法, 具有很强的数学基础, 该方法采用正交多项式方法对不确定变量进行展开, 通过正交多项式的特性, 将随机变量的随机特性转移到多项式系数上. PCE 最初由 Wiener^[6] 提出并用来建立湍流模型. 一些学者对其进行了研究推广, Ghanem^[7-8] 采用 PC 方法研究了结构力学领域的一些问题. Mathelin 等^[9] 采用该方法研究了可压缩湍流喷管流动中随机因素的传播. Xiu 等^[10] 采用 PC 方法研究了圆柱绕流和不可压缩槽道流动, 并推广了基函数. 早期方法都是嵌入式混沌, 需要对确定性模型和程序进行修改, 对于复杂计算问题, 修改已有程序非常困难耗时. 为了克服该缺陷, 一些学者提出了非嵌入式方法. 通常有以下两种方法确定非嵌入式混沌多项式系数: (1) 取样方法^[11-12]; (2) 积分方法^[11-13]. 经此改进后, 混沌多项式方法在复杂问题分析中取得了广泛的应用^[14-17].

为了改进稳健型设计的效率和精度, 本文研究了混沌多项式方法在不确定性分析中的应用原理,

2013-04-23 收到第 1 稿, 2013-07-02 收到修改稿.

1) 赵轲, 博士研究生, 主要研究方向: 飞行器气动设计. E-mail: zhaokecfd@163.com

采用混沌多项式方法代替传统的 Monte Carlo 方法进行不确定性分析, 并以此为基础构建了稳健型气动优化设计系统, 并进行了翼型稳健型优化设计研究. 结果表明文中方法能够克服传统稳健型优化效率低下的问题, 同时高效的计算方法使得优化可以脱离代理模型, 从而改善了由于代理模型预测误差导致的设计精度问题, 大幅提高了优化效率和精度.

1 流场不确定性分析

1.1 流场不确定性及其分析方法

现实中, 存在着各种各样的不确定性, 对于 CFD 分析而言, 流场初值边界信息, 物理模型参数, 几何外形表述及各种固有误差都是不确定产生的源头. 计算和分析这些不确定信息的响应对 CFD 精度评估验证及气动外形稳健型分析等具有至关重要的影响.

不确定性分析方法主要分为以下 3 类: 基于取样方法的不确定分析 (Monte Carlo, 拉丁超立方抽样技术), 基于可靠性模型的不确定性分析, 随机展开方法 (polynomial chaos expansions, and stochastic collocation), 本文主要研究了混沌多项式展开方法.

1.2 混沌多项式

(1) 一般混沌多项式

多项式混沌方法源于 Wiener 提出的同性混沌方法 (homogenous chaos). 该方法采用多项式对随机变量进行级数展开, 将随机变量的随机特性转移到多项式系数上. Wiener^[6] 采用代表高斯型随机变量的 Hermite polynomials 为基函数对随机过程进行谱展开. Cameron-Martin^[18] 定理证明这种展开能够以正交多项式的形式描述任意二阶随机过程. 因此 PCE 就是一种响应面模型, 是原始模型对标准正态随机变量的多项式混沌展开, 采用 Hermite polynomials 作为基函数, 任意二阶随机 $X(\theta)$ 过程可以展开为

$$X(\theta) = a_0 I_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \hat{a}_{i_1} H_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \hat{a}_{i_1 i_2} H_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (1)$$

其中, θ 是一个随机过程, $H_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ 表示随机向量 $\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ 的 Hermite 多项式, 其表达式为

$$H_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n}) = \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T \xi\right) (-1)^n \frac{\partial^n \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T \xi\right)}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} \quad (2)$$

引入变量 $\Psi_j(\xi)$ 与 \hat{a}_j 表述 $H_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n}), a_{i_1 i_2 \dots i_n}$, 式 (1) 可简化为

$$X(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Psi_j(\xi) \quad (3)$$

其中, $\Psi_j(\xi)$ 与 $H_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ 对应, 是一个完备的正交基, 满足

$$\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = \langle \Psi_i^2 \rangle \delta_{ij} \quad (4)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker delta 函数. $\langle \bullet \bullet \rangle$ 为希尔伯特空间下的内积, 此处定义为

$$\langle f(\xi) g(\xi) \rangle = \int f(\xi) g(\xi) W(\xi) d\xi \quad (5)$$

其中 $W(\xi)$ 为多项式基 $\{\Psi_i\}$ 对应的权重函数, 对于 Hermite 多项式, 其表达式为 n 维正态分布函数

$$W(\xi) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T \xi\right)}{\sqrt{(2\pi)^n}} \quad (6)$$

为使式 (3) 可用, 需要对其进行适当的截断. 通过随机变量的维数及所采用的 Hermite 多项式阶次利用下式计算其上界

$$P+1 = \frac{(p+n)!}{p! n!} \quad (7)$$

其中, P 是式 (3) 的求和上限, p 为多项式阶数, n 是随机变量维数.

于是, 式 (6) 可最终写为

$$X(\theta) = \sum_{j=0}^P \hat{a}_j \Psi_j(\xi) \quad (8)$$

(2) 非嵌入型混沌多项式

传统的混沌多项式为嵌入式混沌多项式, 即直接用混沌多项式来表述系统变量, 将随机变量嵌入到系统内部, 进行直接求解. 嵌入式模式直接对求解程序进行修改, 使得程序复杂求解工作量大. 因而本文采用非嵌入式混沌多项式 (non-intrusive polynomial chaos) 进行不确定性分析. 非嵌入式混沌多项式将确定性系统当作黑箱处理, 通过系统应答近似确定混沌多项式系数. 这样大幅度简化了不确定分析难度. 同时该方法使得用户能够在可靠的确定性 CFD 程序基础上建立随机 CFD 分析方法. 非嵌入式混沌多项式的建模原理是, 对于任意随机变量响应 $X(\theta)$, 混沌多项式的系数 $a\{a_i\}, i = 0, 1, \dots, P$, 可以通过将

已知确定性解投影到 PC 正交基 $\{\Psi_i\}$ 上来确定. 如果 $X^d(\xi)$ 表示对应特定的确定变量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 其中 n 为随机变量维数, 那么 PC 混沌多项式系数可由下式求得

$$a_i = \frac{\langle X^d(\xi) \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_i \Psi_i \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \cdot \left[X^d(\xi) \frac{\Psi_i(\xi)}{\langle \Psi_i \Psi_i \rangle} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(-\xi_k^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right] \quad (9)$$

采用高斯埃尔米特积分公式计算上述积分, 积分表达式可表示为

$$a_i = \sum_{m_1=1}^m \cdots \sum_{m_n=1}^m X^d(x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_n}) \cdot \frac{\Psi_i(x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_n})}{\langle \Psi_i \Psi_i \rangle} \prod_{k=1}^n w_{m_k} \quad (10)$$

其中, m 为积分点个数, x_k 和 w_k ($k = 1, 2, \dots, m$) 为一维高斯埃尔米特积分点和权值. 表 1 给出了几组典型的高斯埃尔米特求积节点和积分权值.

表 1 典型高斯-埃尔米特求积节点和积分权值
Table 1 Typical weights and supporting points for Gauss-Hermite quadrature

m	x_k	w_k
3	$\pm 1.732\ 050\ 807\ 57$	$0.166\ 666\ 666\ 7$
	0	$0.666\ 666\ 666\ 7$
	$\pm 2.856\ 970\ 013\ 87$	$0.011\ 257\ 411\ 328$
5	$\pm 1.355\ 261\ 799\ 70$	$0.222\ 075\ 922\ 006$
	0	$0.533\ 333\ 333\ 333$
	$\pm 3.750\ 439\ 717\ 68$	$0.000\ 548\ 268\ 858\ 73$
7	$\pm 2.366\ 759\ 410\ 87$	$0.030\ 757\ 123\ 968\ 1$
	$\pm 1.154\ 405\ 394\ 80$	$0.240\ 123\ 178\ 599$
	0	$0.457\ 142\ 857\ 143$

具体对应到航空问题, 针对不确定因素, 例如马赫数, 迎角及几何外形, 确定其概率分布, 将其转化为随机变量, 即上文中的 ξ , 接着计算出高斯积分节点所对应的函数值, 如升阻力, 压力系数等, 然后根据式 (10) 计算多项式系数 a_i , 得到不确定性变量所对应的随机响应分布.

(3) 均值与方差计算

在得到混沌多项式系数之后, 根据 Hermite 多项式的正交性, 随机变量响应 $X(\theta)$ 的均值可通过下式

求得

$$\begin{aligned} \bar{X}(\xi) &= E_{PC}(X(\xi)) = \int_R X(\xi) W(\xi) d\xi = \\ &= \int_R \left(\sum_{j=0}^P a_j \Psi_j(\xi) \right) W(\xi) d\xi = \\ &= a_0 \int_R \Psi_0(\xi) W(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^P a_j \int_R \Psi_j(\xi) W(\xi) d\xi = \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^P a_j \int_R \Psi_0(\xi) \Psi_j(\xi) W(\xi) d\xi = a_0 \quad (11) \end{aligned}$$

由上式可以看出, 响应函数 $X(\theta)$ 的均值为其多项式混沌展开式的 0 阶项. 采用相同的方法, 可以获得响应函数 $X(\theta)$ 的方差, 如下所示

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}_{PC}[X(\xi)] = E_{PC} \left[(X(\xi) - \bar{X}(\xi))^2 \right] = \\ &= \int_R (X(\xi) - \bar{X}(\xi))^2 W(\xi) d\xi = \\ &= \int_R (\bar{X}(\xi) - a_0)^2 W(\xi) d\xi = \\ &= \int_R \left(\sum_{j=1}^P a_j \Psi_j(\xi) \right)^2 W(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P \int_R a_j \Psi_j(\xi) a_k \Psi_k(\xi) W(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{j=1}^P [a_j^2 \langle \Psi_j^2 \rangle] \quad (12) \end{aligned}$$

2 RAE2822 翼型跨音速流场不确定性分析

2.1 CFD 流场求解器

确定性求解器选择本课题组开发的多块结构网格 RANS 程序. 该程序采用有限体积方法求解流场; 空间无黏对流与压力项通量采用 Roe 通量差分裂方法; 用来描述剪切应力和热传导效应的黏性项通量采用二阶中心差分格式进行离散; 时间推进采用隐式近似因子分解法, 并且采用了多重网格加速收敛算法. 采用 SA 湍流模型进行湍流模拟. 图 1 给出了计算分析及优化所用的网格. 图 2 给出了 RAE2822 典型状态下的压力分布与实验对比. 由图可见程序能够很好地模拟超临界翼型流场.

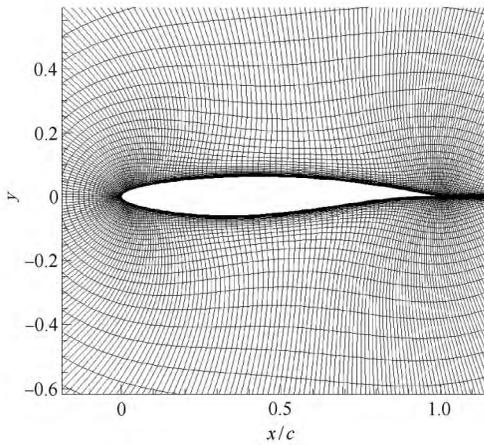


图 1 流场求解所用网格

Fig. 1 The computational grid around the airfoil

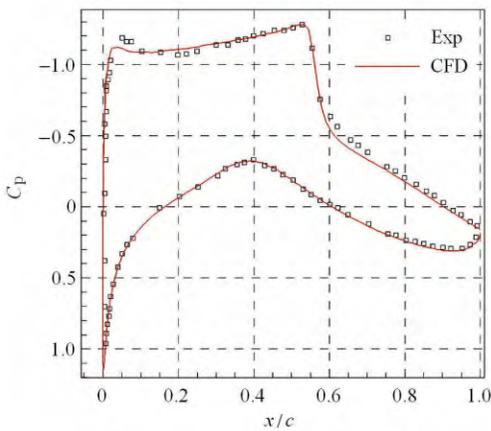


图 2 翼型压力分布与实验数据对比

Fig. 2 Comparison of the pressure coefficient between the CFD and experiment data

2.2 跨音速流场不确定性分析

采用 RAE2822 跨音速流场不确定性量化分析为验证研究算例, 研究了来流马赫数不确定对跨音速流场及气动特性影响, 同时验证了混沌多项式方法的可靠性和高效性, 分析了多项式阶次对计算结果的影响, 研究了相关参数的选取. 计算状态为 $Re = 6.5 \times 10^6$, $\alpha = 2.79^\circ$, 假设马赫数服从 $N(0.734, (0.02)^2)$ 的正态分布. 分别采用 Monte Carlo 方法和混沌多项式方法进行不确定性分析. 根据通行做法, 分别进行了 1 000 次和 5 000 次 Monte Carlo 分析.

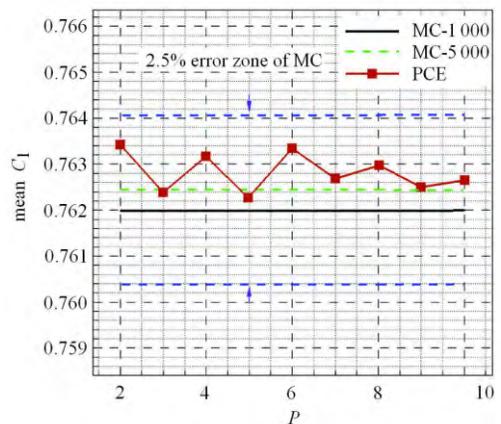
经过分析计算, 得到了气动力系数和流场统计特性. 表 2 给出了不同方法对应的确定性计算次数. 由表可知混沌多项式方法与 Monte Carlo 方法相比, 计算效率远高于 Monte Carlo 方法, 大幅减小了确定性 CFD 分析次数.

表 2 混沌多项式方法与 Monte Carlo 方法计算效率对比

Table 2 Comparison of the efficiency between PCE and

Method	Monte Carlo method	
	CFD evaluations	Cost/min
MC	1 000	336
MC	5 000	1 680
$P = 2$	3	1
$P = 3$	4	1.3
$P = 4$	5	1.7
$P = 5$	6	2
$P = 6$	7	2.3
$P = 7$	8	2.7
$P = 8$	9	3
$P = 9$	10	3.3
$P = 10$	11	3.7

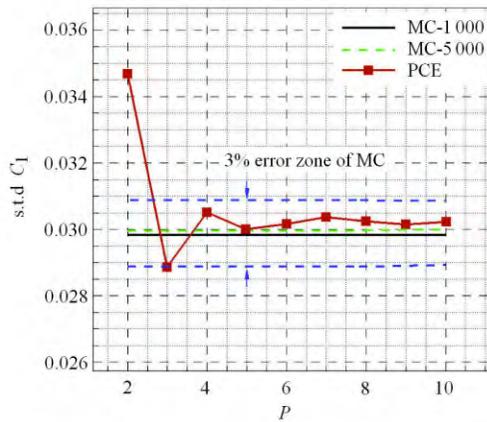
为进一步分析比较, 图 3 ~ 图 5 分别给出了升力系数, 阻力系数和力矩系数的均值与根方差随多项式阶次变化, 并与 MC 方法进行了对比. 由图可知随着阶次升高, 均值与方差趋于收敛, 同时均值的计算精度高于方差, 随着阶次升高, 混沌多项式计算结果趋近于 5 000 次 MC 方法结果. 由方差计算结果可知马赫数的不确定性对跨音速气动特性影响很大. 由图 3 可知, 升力系数均值在 MC 方法的 2.5% 误差带内, 其绝对误差小于 0.001, 而 3 阶以上混沌多项式所得方差在 MC 方法的 3% 误差带内, 其结果误差绝对值也小于 0.000 5. 由图 4 可知, 4 阶以上多项式计算精度达到 MC 方法的 0.25% 误差带内, 而相比之下, 方差计算精度在 3 阶以上达到 MC 方法的 0.7% 误差带内. 经过分析对比可知 4 阶多项式已经



(a) 升力系数均值对比

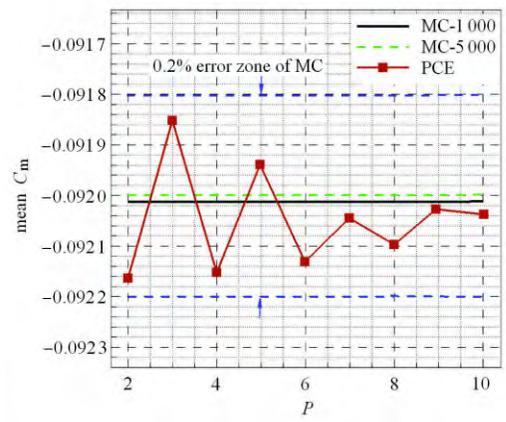
(a) Comparison of mean of lift coefficient

图 3 升力系数均值与根方差随多项式系数变化曲线
Fig. 3 Variation of mean and standard deviation of lift coefficient compared with MC



(b) 升力系数均方根对比

(b) Comparison of standard deviation of lift coefficient



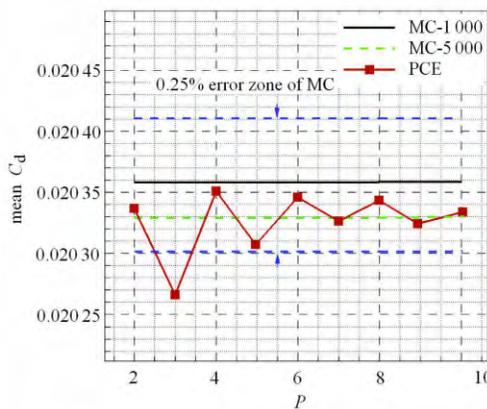
(a) 力矩系数均值对比

(a) Comparison of mean of moment coefficient

图 3 升力系数均值与根方差随多项式系数变化曲线 (续)

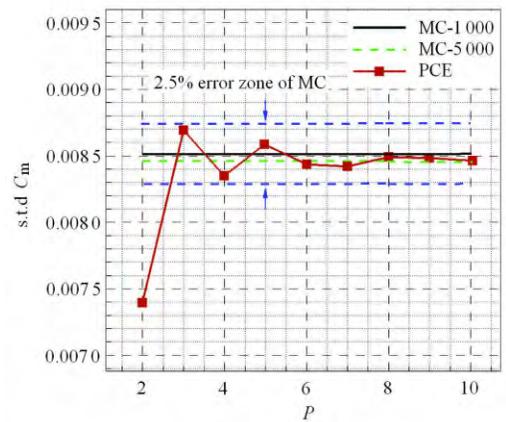
Fig. 3 Variation of mean and standard deviation of lift coefficient

compared with MC (continued)



(a) 阻力系数均值对比

(a) Comparison of mean of drag coefficient



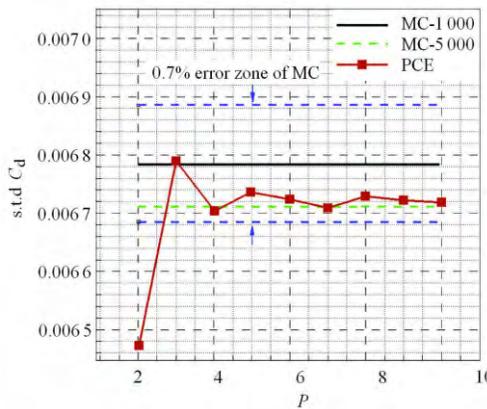
(b) 力矩系数均方根对比

(b) Comparison of standard deviation of moment coefficient

图 5 力矩系数均值与根方差随多项式系数变化曲线

Fig. 5 Variation of mean and standard deviation of moment coefficient

compared with MC



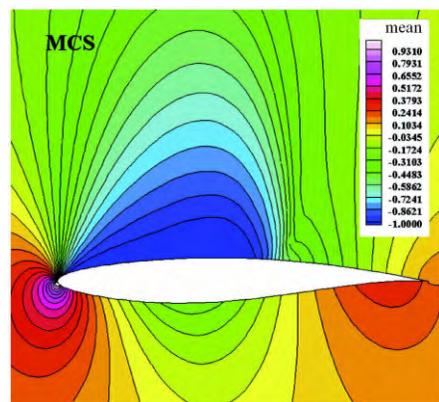
(b) 阻力系数均方根对比

(b) Comparison of standard deviation of drag coefficient

图 4 阻力系数均值与根方差随多项式系数变化曲线

Fig. 4 Variation of mean and standard deviation of drag coefficient

compared with MC

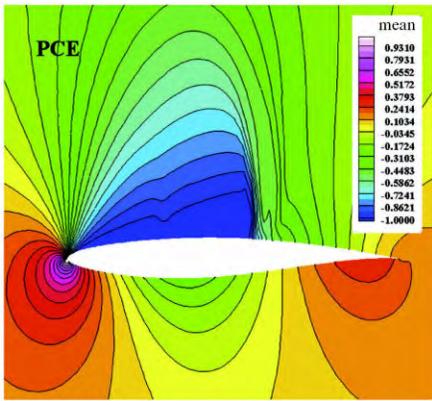


(a) MCS 方法计算的平均压力系数云图

(a) Mean pressure coefficient contour computed by MCS

图 6 流场平均压力云图对比

Fig. 6 Comparison of mean pressure coefficient contour of flow field

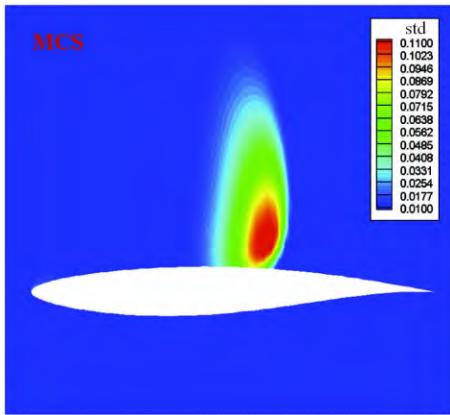


(b) PCE 方法计算的平均压力系数云图

(b) Mean pressure coefficient contour computed by PCE

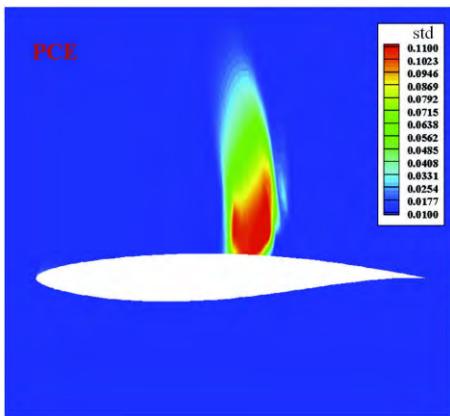
图 6 流场平均压力系数云图对比 (续)

Fig. 6 Comparison of mean pressure coefficient contour of flow field (continued)



(a) MC 方法计算的的压力系数均方根云图

(a) pressure coefficient standard deviation contour computed by MCS



(b) PCE 方法计算的的压力系数均方根云图

(b) Pressure coefficient standard deviation contour computed by PCE

图 7 流场压力根方差云图对比

Fig. 7 Comparison of pressure coefficient standard deviation contour of flow field

能够很好地量化翼型的阻力不确定性, 其计算精度达到 0.3 cont, 已经远小于 CFD 的误差带, 能够很好地反映翼型的阻力均值及误差特性. 图 5 给出了力矩系数的均值和方差, 由图可见所有混沌多项式所得均值均在 MC 方法的 0.2% 误差带内, 3 阶以上混沌多项式所得误差在 MC 方法的 2.5% 误差带内, 绝对误差均小于 0.000 2, 精度小于 CFD 的误差.

为进一步分析, 本文还给出了 MC 方法与 3 阶混沌多项式方法的得到的流场压力云图和方差云图的对比, 如图 6 和图 7 所示. 由图可见, PCE 方法能够高效准确地分析 CFD 流场的不确定性. 流场均值和方差分布表明翼型跨音速流场的不确定型误差主要集中在上表面激波位置处, 这是由于激波处的强非线性造成, 与理论分析结果一致. 流场云图表明马赫数的不确定性对流场分布及方差响应影响很大, 尤其是激波位置及强度, 存在着很大的不确定性, 因此在设计中应该考虑马赫的不确定性影响.

3 优化设计系统

3.1 稳健型设计

由上文的分析可知, 马赫数的随机波动对流场的结构影响很大, 尤其是在激波位置处, 输入变量的变化导致激波处方差变化剧烈. 不确定性在流场上的传播导致了气动力系数方差很大, 表面马赫数的不确定性会强烈影响气动力特性及翼型的整体性能. 因而需要针对马赫数的波动进行稳健型设计, 减小翼型特性对马赫数的敏感性. 同时混沌多项式方法能够大幅度提高不确定性分析效率, 能够很好地应对优化设计过程中大规模的不确定分析.

稳健型优化设计是通过优化目标函数的均值和方差来提高设计对象的性能和降低其对不确定因素的敏感性. 因此稳健型优化本质上是一个多目标优化问题, 它要求同时优化设计对象的均值和方差. 本文考虑马赫数稳健型设计, 建立稳健型优化设计数学模型为

$$\left. \begin{aligned} & \text{Min } (\mu, \sigma^2) \\ & \text{Subject to: } X \in V, \text{ and } C(X, Ma) = C_{l_{\text{cruise}}} \\ & t_{1 \text{ max}} \geq 0.12 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中, $C_{l_{\text{cruise}}}$ 为设计巡航升力系数, μ 和 σ 分别为阻力系数的均值和方差. 其计算公式如下

$$\mu = E(C_d) = \int_{Ma_{\text{min}}}^{Ma_{\text{max}}} C_d(X, Ma)P(Ma)dMa \quad (14)$$

$$\sigma^2 = E(C_d) = \int_{Ma_{min}}^{Ma_{max}} [C_d(X, Ma) - E(C_d)]^2 P(Ma) dMa \quad (15)$$

至此,可知稳健型设计的关键及难点在于系统均值和方差的确定,因此快速高效地对设计对象进行不确定性分析成为设计的焦点.传统的方法是采用 Monte Carlo 试验进行确定,鉴于该方法巨大的计算量,本文引入了混沌多项式方法进行不确定性分析.

3.2 优化设计系统

稳健型优化是个典型的多目标优化问题,解决此问题的最佳方法就是基于 pareto 最优解集的多目标算法.本文优化搜索算法采用多目标遗传算法 NSGA-II^[18], Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) 是早期 MOEA 算法 NSGA 的改进版本.根据产生的各种非劣前端,采用更好的记账策略,从而减少了算法运行的整体时间,适应值采用聚集距离,定义了一个偏序集,构造新个体时依次在偏序集中选择个体.该算法产生的非劣最优解分布均匀,允许存在多个不同的等价解.

通过耦合多目标遗传算法,高效 CFD 分析评估技术及快速精确的 PCE 流动不确定分析方法,并采用 CST^[19-22] 参数化方法进行翼型参数化,建立了鲁棒性优化系统.图 8 给出了优化设计流程图.

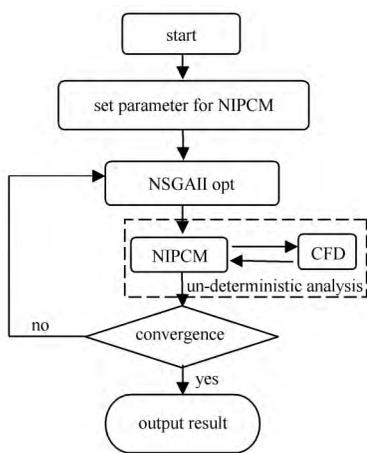


图 8 基于混沌多项式的稳健型优化设计流程

Fig. 8 Flow chart of the robust design system

4 超临界翼型稳健型设计

根据上文建立的稳健型设计系统,以 RAE2822 翼型为初始翼型进行超临界翼型稳健性设计,假设马赫数服从正态分布 $Ma_\infty \sim N(0.73, (0.015)^2)$, 设计巡航状态为 $Ma_\infty = 0.73, Re = 6.5 \times 10^6, C_{l_{cruise}} = 0.68$.

设定多目标遗传算法参数为:种群数目 60, 进化代数 40 代.由于 PCM 方法的高效性,本文采用直接 CFD 分析方法进行稳健型设计,克服了由于代理模型而导致的误差.综合考虑精度与效率,本文不确定性分析采用 4 点高斯埃尔米特积分计算非嵌入式混沌多项式系数,构建 3 阶混沌多项式模型进行稳健型优化设计.经过多目标优化后,得到非支配解集,如图 9 所示.本文采用传统的基于 MC 方法和代理模型的稳健型设计作为对照算例与 PCE 稳健型设计进行了对比.

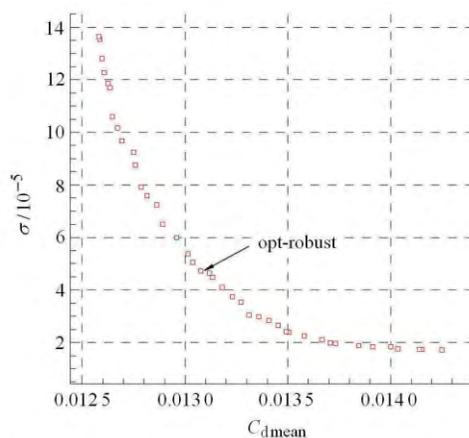


图 9 PCE 稳健型优化所得非支配解集

Fig. 9 The pareto front solutions of robust design based on PCE

经过分析抉择,选出综合最优解 opt-robust.图 10 为优化后的翼型形状与初始翼型的比较.分析结果比较,优化后的翼型上表面更加平坦,传统方法所得外形弯度和后加载均大于 PCE 方法,上表面外形没有 PCE 方法光滑.

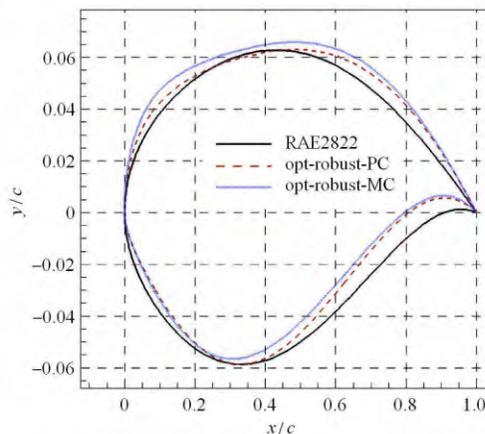
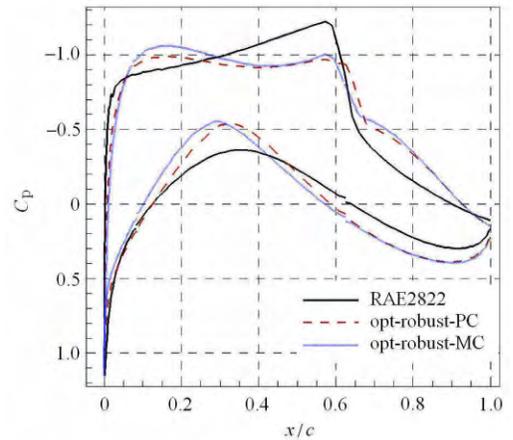


图 10 优化前后翼型形状比较

Fig. 10 Comparison between the three airfoils

图 11 分别给出了马赫数为 0.70, 0.73, 0.76 状态下翼型压力分布对比. 由图可见原始翼型激波强度随马赫数变化剧烈; 稳健型设计在设计点为弱激波设计, 减小了压力分布关于马赫数的敏感性. 混沌多项式方法所得翼型压力分布优于传统稳健型设计方法.

图 12 给出了翼型阻力发散曲线比较, 可以看出, 稳健型优化后的翼型在巡航马赫数不确定范围内比初始翼型气动特性有着较好的改善, 随着马赫数增加, 阻力系数变化缓慢. 同时基于 PCE 方法的稳健型设计其特性均优于传统的稳健型设计方法. 这主要是因为传统的稳健设计方法中, 由于代理模型在跨音速的强非线性区域精度降低, 极大地影响了翼型阻力特性均值及方差的评估, 从而使得优化结果变差.

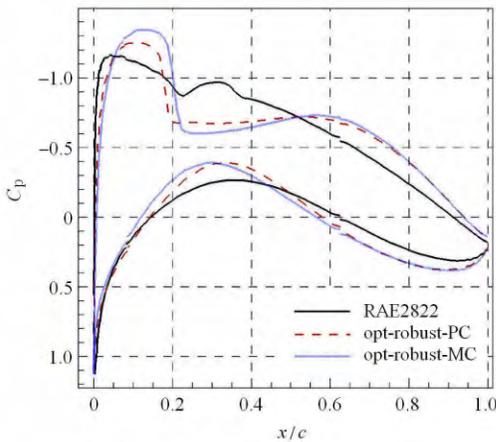


(c) 马赫数为 0.76 时的压力分布对比

(c) Pressure coefficient at $Ma = 0.76$

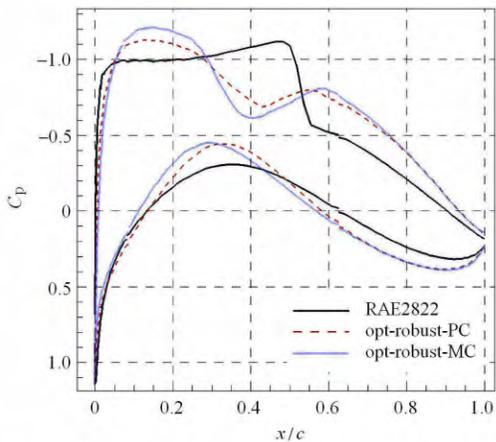
图 11 优化前后不同马赫数压力分布对比

Fig. 11 Pressure distributions for RAE 2822 and two optimizations at different three Mach number



(a) 马赫数为 0.70 时的压力分布对比

(a) Pressure coefficient at $Ma = 0.70$



(b) 马赫数为 0.73 时的压力分布对比

(b) Pressure coefficient at $Ma = 0.73$

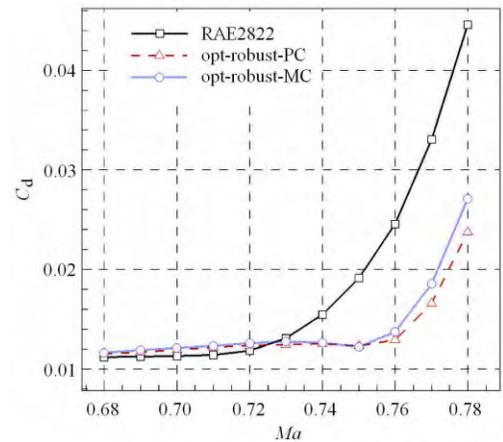


图 12 优化前后翼型阻力特性

Fig. 12 Drag coefficients between three airfoils

5 结论

本文研究了非嵌入式混沌多项式方法在翼型稳健型优化设计中的应用, 并结合多目标遗传算法以及 CST 参数化方法, 构建了一套高效、可靠的稳健型优化设计系统.

(1) 通过对 RAE2822 翼型跨音速流场进行不确定分析, 表明混沌多项式方法能够高效准确的量化不确定性流场的均值与方差特性, 与传统方法相比, 精度相近而效率大幅提高.

(2) 通过采用混沌多项式方法, 克服了传统不确定性分析方法, 如 Monte Carlo 等, 计算量过大的缺点, 提高了 200 多倍的设计效率. 由于 PCE 方法的能够快速获得设计模型的不确定响应, 可以直接进行

气动稳健型设计, 克服了代理模型对设计的精度的影响。通过对比超临界翼型优化结果, 表明 PCE 方法能够大幅提高稳健型设计的效率和精准度, 为进行大规模复杂气动外形稳健型设计奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 Li W, Huysse L, Padula S. Robust airfoil optimization to achieve consistent drag reduction over a Mach range. ICASE Report No. 2001-22, 2001
- 2 陈立周. 稳健设计. 北京: 机械工业出版社, 2000. 5(Cheng Lizhou. Robust Design. Beijing: Mechanical Industry Press, 2000. 5 (in Chinese))
- 3 Zhong XP, Ding JF, Li WJ, et al. Robust airfoil optimization with multi-objective estimation of distribution algorithm. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2008, 21(4): 289-295
- 4 Anile AM, Spinella S, Rinaudo S. Stochastic response surface method and tolerance analysis in microelectronics. COMPEL. *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 2003, 22(2): 314-327
- 5 Tatang MA, Pan W, Prinn RG, et al. An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical models. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102(D18): 21925-21932
- 6 Wiener N. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 1938, 60: 897-936
- 7 Ghanem R, Spanos P. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. New York: Springer-Verlag, 1991
- 8 Ghanem RG. Ingredients for a general purpose stochastic finite element formulation. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 1999, 168: 19-34
- 9 Mathelin L, Hussaini MY, Zang TZ, et al. Uncertainty propagation for turbulent, compressible nozzle flow using stochastic methods. *AIAA Journal*, 2004, 42(8): 1669-1676
- 10 Xiu D, Karniadakis GE. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 2003, 187(1): 137-167
- 11 Debusschere BJ, Najm HN, Pebay PP, et al. Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2004, 26(2): 698-719
- 12 Reagan M, Najm HN, Ghanem RG, et al. Uncertainty quantification in reacting flow simulation through non-intrusive spectral projection. *Combustion and Flame*, 2003, 132: 545-555
- 13 Mathelin L, Hussaini MY, Zang TZ. Stochastic approaches to uncertainty quantification in CFD simulations. *Numerical Algorithms*, 2005, 38(1): 209-236
- 14 Wataru Y. Stochastic drag analysis via polynomial chaos uncertainty quantification. AIAA 2013-0962, 2013
- 15 王晓东, 康顺. 多项式混沌方法在随机方腔流动模拟中的应用. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41(6): 790-798 (Wang Xiaodong, Kang Shun. Application of polynomial chaos on numerical simulation of stochastic cavity flow. *Sci China Tech Sci*, 2011, 41(6): 790-798 (in Chinese))
- 16 Mathelin L, Hussaini MY, Zang TZ. Stochastic approaches to uncertainty quantification in CFD simulations. *Numerical Algorithms*, 2005, 38(1): 209-236
- 17 Eldred MS, Burkardt J. Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification. AIAA Paper 2009-0976, 2009
- 18 Cameron RH, Martin WT. The orthogonal development of non-linear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Annals of Mathematics*, 1947, 48(2): 385-392
- 19 Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 181-197
- 20 Jacob CH, William AC. A parametric approach to supercritical airfoil design optimization. AIAA Paper 2009-6950, 2009
- 21 Ceze M. A study of the CST Parameterization Characteristics. AIAA Paper 2009-3767, 2009
- 22 Kulfan BM. Universal parametric geometry representation method. *Journal of Aircraft*, 2008, 45(1): 142-158
- 23 李静, 高正红, 黄江涛等. 基于 CST 参数化方法气动优化设计研究. *空气动力学学报*, 2012, 30(4): 443-449 (Li Jing, Gao Zhenghong, Huang Jiangtao, et al. Aerodynamic optimization system based on CST technique. *Acta Aerodynamic Sinica*, 2012, 30(4): 443-449 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

UNCERTAINTY QUANTIFICATION AND ROBUST DESIGN OF AIRFOIL BASED ON POLYNOMIAL CHAOS TECHNIQUE

Zhao Ke^{*,1)} Gao Zhenghong^{*} Huang Jiangtao^{*,†)} Li Jing^{*}

^{*}(National Key Laboratory of Aerodynamic Design and Research, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

^{†)}(China Aerodynamics Research & Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract Robust design optimization has gained increasing concern in the engineering design process because it can provide an economical design that is insensitive to variations in the input variables without eliminating their causes. The key of robust design is uncertainty analysis. So in this paper the uncertainty analysis based on polynomial chaos was investigated and combined with CFD method to quantify the uncertainties in computational aerodynamic design. The transonic flow around RAE2822 airfoil is studied to test the presented method and analyze the effect of the polynomial order to the precision of the aerodynamic characteristic. The robust design of a supercritical airfoil based on the uncertainty of Mach number was conducted to validate the PCE method. It is shown by the optimization result that the drag coefficient was decreased at the design point while the sensitivity of the drag coefficient about the Mach number was weakened. It is proved that the PCE method can improve the efficiency of robust design and is a good choice for aerodynamic robust design.

Key words robust design, NSGAII, polynomial chaos, Hermite polynomials, uncertainty quantification

Received 23 April 2013, revised 2 July 2013.

1) Zhao Ke, PhD candidate, research interests: aerodynamic design of aircraft. E-mail: zhaokecfid@163.com