第 45 卷 第 3 期　　力　学　学　报　　Vol. 45，No. 3
2013 年 5 月　　Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics　　May，2013

研究论文

基于区域分解的结构动力学系统首次穿越失效[1)]

任丽梅 [*,†,2)]　徐　伟 [*]

[*](西北工业大学理学院, 西安 710072)

[†](长安大学理学院，西安 710064)

摘要　提出了高斯白噪声激励的线性及非线性结构动力学系统的首次穿越失效概率的估计方法. 对于线性结构动力学系统，失效区域被分解为互斥的基本失效域之和，每个基本失效域可用其设计点完全描述，并以正态分布代替卡方分布估计失效概率中的参数. 对于非线性结构动力学系统，基于 Rice 穿越理论，将非线性方程转化为与之具有相同平均上穿率的线性化方程，然后利用文中方法对等效线性化方程估计首穿失效概率. 最后给出了线性及非线性结构动力学系统的数值例子，并将所提方法与蒙特卡罗法及重要样本法相比较，模拟结果显示了方法的正确性与有效性.

关键词　结构可靠性, 首穿失效概率, 区域分解, 等效线性化

中图分类号：O324　　**文献标识码**：A　　DOI：10.6052/0459-1879-12-355

引 言

在地震工程，桥梁工程等领域中, 动力学系统的结构可靠性一直是研究热点，而受到诸如地震、风及海浪等随机激励的结构动力学系统的首次穿越失效更是研究的焦点之一. 首次穿越失效概率 (简称首穿失效概率) 是结构安全性的重要指标，是指在某个时间段内结构响应首次超过指定安全域边界的概率. 首穿失效概率即计算如下概率

$$P_F = P\{\exists t \in (0, T),\quad |Y(t)| > b(t)\} \tag{1}$$

式中, $Y(t)$ 表示系统响应，$b(t)$ 表示安全域边界，F 表示失效域，T 表示激励持时. 系统响应越过安全域边界即表示失效. 尽管这个问题已经得到了高度重视，但仍是结构安全性分析最具挑战性的问题之一，因为直到现在，即使是最简单的线性振子场合也没有可利用的精确解.

近年来，基于方差缩减技巧的蒙特卡罗 (Monte Carlo Simulations, MCS) 方法得到了许多研究者的认同，Proppe 等 [1] 也提出 MCS 和等效线性化方法是适合解决首穿失效概率估计问题的. MCS 方法是求解结构动力学可靠性问题的一般方法，其精度和计算效率不依赖于失效域的几何特性与输入随机变量的数目，而仅依赖于失效概率和样本数，这一性质很好地克服了许多数值方法 (路径积分法、胞映射法、随机平均法、有限元等 [2-6]) 所面临的困难：方法复杂度随状态空间维数的增加呈指数增加趋势. 近年来，研究者基于方差缩减技巧先后提出了线性动力学系统的重要样本法 [7-9]、受控蒙特卡罗方法 [10]、两步迭代法 [11]、区域分解法 [12]、基于概率简单叠加法则的计算方法 [13]、子集模拟法 [14] 等. 而本文利用中心极限等定理，进一步完善和简化区域分解法，并且利用等效线性化方法，将本法推广到非线性结构动力学系统. 数值算例显示了本文方法的正确性与有效性.

1 方 法

考虑在白噪声激励下的线性结构动力学系统，系统运动方程表示为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{Y}(t) + 2\beta\varpi_0\dot{Y}(t) + \varpi_0^2 Y(t) = W(t) \\ &Y(0) = 0,\ \dot{Y}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中，β 是阻尼系数，ϖ_0 是自然频率，$W(t)$ 是单边谱密度为 G_0 的高斯白噪声.

将线性系统 (2) 离散化，系统激励 $W(t)$ 和响应 $Y(t)$ 用单位脉冲响应函数 $h(t,\tau)$ 表示为

$$Y(t) = \int_0^t h(t,\tau)W(\tau)\mathrm{d}\tau$$

2012–12–12 收到第 1 稿，2013–02–13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10932009, 11172233) 和长安大学中央高校专项基金 (CHD2011JC019) 资助项目.

2) 任丽梅，主要研究方向：非线性随机动力学. E-mail: renlm1014@126.com

式中 $h(t,\tau)$ 表示 τ 时刻输入的单位脉冲在 t 时刻的输出.

令 $\Delta t = \dfrac{T}{n}$, $t_k = k\Delta t$, $k = 1,2,\cdots,n$. $z(1)$, $z(2)$, $\cdots$, $z(n)$ 是标准正态随机变量, 当 $\Delta t \to 0$ 时, $g(k,s) \to h(t_k,t_s)$，则系统响应 $Y(t)$ 离散化为

$$Y(k) = \sum_{s=1}^{k} g(k,s) z(s) \sqrt{2\pi G_0 \Delta t} \tag{3}$$

失效域可分解为

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} \{|Y(t_k)| > b(t_k)\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{|Y(k)| > b(k)\}$$

称 F_k $(k = 1,2,\cdots,n)$ 为基本失效域. 基本失效域可被局部设计点 $\boldsymbol{z}_k^*$ 完全刻画 [8,15-16]. 且 $\boldsymbol{z}_k^* = \{z(1), z(2), \cdots, z(k)\}$ 满足有约束的优化问题

$$\left.\begin{array}{l} \min\{z^2(1) + \cdots + z^2(k)\} \\ \text{s.t. } Y(k) - b(k) = 0 \end{array}\right\}$$

基本失效域的概率为

$$P(F_k) = 2\varPhi(-\|\boldsymbol{z}_k^*\|) \tag{4}$$

其中，$\varPhi(\cdot)$ 为标准正态分布函数，$\|\cdot\|$ 为范数. 基本失效域的可靠性性能指标 $\beta_k = \left\|\boldsymbol{z}_k^*\right\|$.

现将基本失效域进行分解，令 $G_1 = F_1$，$G_i = F_i - \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} F_j$，$i = 1,2,\cdots,n-1$，失效域 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$，易知 G_i，$i = 1,2,\cdots,n$ 互斥.

首穿失效概率为

$$P_F = P\{F\} = \sum_{k=1}^{n} P(G_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(G_k)}{P(F_k)} P(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k P(F_k) \tag{5}$$

式中，η_k 可以用 $\hat{\eta}_k = \dfrac{\tilde{N}_K}{N_k}$ 估计，N_k 表示属于失效域 F_k 的样本数，$\tilde{N}_k$ 表示在 N_k 个样本中不属于 F_j 的样本数，$j = 1,2,\cdots,k-1$. 则根据重要样本法

$$P_F = \sum_{k=1}^{n} \eta_k P(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k P(F_k) \frac{1}{g(k)} g(k)$$

选取重要抽样密度函数为

$$g(k) = \frac{P(F_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(F_i)} \tag{6}$$

则有 $P_F = \sum\limits_{i=1}^{n} P(F_i) \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k g(k)$.

首穿失效概率的估计为

$$\hat{P}_F = \hat{\eta} \sum_{i=1}^{n} P(F_i), \quad \hat{\eta} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \hat{\eta}_{k_j} \tag{7}$$

式中, M 为模拟时的样本容量. 式 (7) 显示，首穿失效概率的估计可分成两步：首先，根据式 (4) 计算 $P(F_i)$；其次，计算系数 $\hat{\eta}$.

$\hat{\eta}_{k_j}$ 的计算过程如下：

首先，产生一个属于基本失效域 F_k 的样本 $\boldsymbol{z}_k$，具体方法如下：

产生 n 维标准正态随机变量 $\boldsymbol{z}$ 及 $[0,1]$ 上均匀分布随机数 u，构造

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z} + (\alpha - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_k^* \rangle) \boldsymbol{u}_k^* \tag{8}$$

其中，$\alpha = \varPhi^{-1}(u + (1-u)\varPhi(\beta_k))$，$\boldsymbol{u}_k^* = \boldsymbol{z}_k^* / \beta_k$.

其次，判断样本 $\boldsymbol{z}_k$ 是否属于基本失效域 F_j，$j \neq k$，具体方法如下：

计算 $\|\boldsymbol{z}_k\|$ 及所有

$$c_j = \frac{\beta_j}{(\boldsymbol{u}_z)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_j^*} \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{u}_z = \dfrac{\boldsymbol{z}_k}{\|\boldsymbol{z}_k\|}$, $\boldsymbol{u}_j^* = \dfrac{\boldsymbol{z}_j^*}{\beta_j}$.

若 $\|\boldsymbol{z}_k\| > c_j$，即 $\boldsymbol{z}_k$ 属于基本失效域 F_j.

最后，系数 $\hat{\eta}_{k_j}$ 的具体计算方法: 对式 (9) 计算所有的 c_j，$j = 1,2,\cdots,n$，选取所有非负 c_j 进行非降序排列，$0 \leqslant c_{j_1} \leqslant \cdots \leqslant c_{jN^+}$，并且有 $c_{j_l} \leqslant \|\boldsymbol{z}_k\| \leqslant c_{j_{l+1}}$，则有

$$\hat{\eta}_{k_j} = \sum_{l=L}^{N^+} \frac{1}{l} P\left\{c_{j_l} \leqslant \|\boldsymbol{z}_k\| \leqslant c_{j_{l+1}}\right\} = \sum_{l=L}^{N^+} \frac{1}{l} P\left\{c_{j_l}^2 \leqslant \|\boldsymbol{z}_k\|^2 \leqslant c_{jl+1}^2\right\}$$

$\|\boldsymbol{z}_k\|^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 [12]，由于卡方分布密度系数中含有伽玛函数，导致计算复杂，计算量大. 本文据中心极限定理及卡方分布性质：当 $n \to \infty$ 时，自由度为 n 的卡方分布随机变量 χ_n^2 满足：$\dfrac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ 以分布收敛到标准正态分布.

即对给定值 x，当 $n \to \infty$ 有

$P\{\chi_n^2 \leqslant x\} = P\left\{\dfrac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \leqslant \dfrac{x-n}{\sqrt{2n}}\right\} \approx \varPhi\Big(\dfrac{x-n}{\sqrt{2n}}\Big)$ 成立，近似相等符号在 $n > 60$ 成立.

则 $\hat{\eta}_{k_j}$ 可用下式计算

$$\hat{\eta}_{k_j} = \sum_{l=L}^{N^+} \frac{1}{l} \frac{\varPhi\Big(\dfrac{c_{j_l}^2 - n}{\sqrt{2n}}\Big) - \varPhi\Big(\dfrac{c_{j_{l+1}}^2 - n}{\sqrt{2n}}\Big)}{1 - \varPhi\Big(\dfrac{c_{j_L}^2 - n}{\sqrt{2n}}\Big)} \tag{10}$$

本文具体方法如下：

(1) 写出极限状态方程，求解设计点 $\boldsymbol{z}_k^*$，计算基本失效域概率 $P(F_k)$ 及可靠性性能指标 β_k.

(2) 根据重要抽样密度函数 (6)，选出失效域下标 k，确定失效域 F_k. 即计算区间

$$\Big[\sum_{k=1}^{i} g(k-1),\ \sum_{k=1}^{i} g(k)\Big],\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $g(0) = 0$，产生 $[0, 1]$ 上均匀分布随机数 u, 视其落入那个区间，即 $k = i$.

(3) 根据式 (8) ~ 式 (10) 计算 $\hat{\eta}_{k_j}$.

(4) 将 (2) 和 (3) 步进行 M 次，根据式 (7) 计算 $\hat{\eta}$，从而可得首穿失效概率的估计值

$$\hat{P}_F = \hat{\eta} \sum_{i=1}^{n} P(F_i)$$

2 数值模拟

2.1 数值算例 1

考虑线性系统 [12]

$$m\ddot{Y}(t) + c\dot{Y}(t) + kY(t) = mW(t) \tag{11}$$

式中, $W(t)$ 是单边谱密度 $G_0 = 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s^3}$ 的高斯白噪声，其中 $m = 10^4\ \mathrm{kg}$，$c = 800\pi\ \mathrm{kg/s}$，$k = 4\times10^4\pi^2\ \mathrm{N/m}$. 脉冲响应函数 $h(t) = \dfrac{1}{\omega_\mathrm{d}} \exp(-\beta\omega_0 t)\sin(\omega_\mathrm{d} t)$，其中，$\beta = 0.02$, $\varpi_0 = 2\pi$, $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta\omega_0)^2}$. 系统假设 $T = 20\ \mathrm{s}$，$Y(0) = \dot{Y}(0) = 0$，令 $\Delta t = 0.02$，$n = 1\,000$，安全域边界 $b = 2.24\ \mathrm{cm}$.

极限状态方程为

$$G(k, \boldsymbol{z}) = Y(k, z_k) - b,\ \ k = 1, 2, \cdots, n$$

求解优化问题

$$\left.\begin{aligned} &\min \beta^2(t_k) = \min\{z_k(1)^2 + \cdots + z_k(k)^2\} \\ &\text{s.t. } G(k, \boldsymbol{z}) = 0 \end{aligned}\right\}$$

即可得设计点 $\boldsymbol{z}_k^* = (z_k^*(1), z_k^*(2), \cdots, z_k^*(k))$

$$z_k^*(s) = \frac{1}{\sigma_k^2} g(k, s)\sqrt{2\pi G_0 \Delta t} b(t), (k \geqslant s)\ \ s = 1, 2, \cdots, k$$

其中, $\sigma_k^2 = Var(Y(k)) = 2\pi G_0 \Delta t \sum\limits_{s=1}^{k} g^2(k, s)$.

当安全域边界 $b = 2.24\ \mathrm{cm}$，应用 MCS 方法采用 10^5 个样本可得失效概率的估计值为 2.961×10^{-3}，利用本文方法模拟 15 次，每次 100 个样本，失效概率计算如表 1 所示，15 次模拟结果的算数平均值为 3.021×10^{-3}. 表 2 是将本文方法 (procedure 1) 与 Au 等 [8] 的高效计算方法 (procedure 2) 及 Lambros 的区域分解方法 (procedure 3) 相比较，并给出不同方法的变异系数 (coefficient of variation, COV), 从表 2 不仅可以看出本文方法的正确性，而且可看出几种方法的计算精度相近.

表 1 15 次模拟的失效概率值

Table 1 The value of failure probability

3.237×10^{-3}	2.971×10^{-3}	$3.083\,2\times10^{-3}$	3.142×10^{-3}
2.973×10^{-3}	3.063×10^{-3}	2.833×10^{-3}	2.757×10^{-3}
3.125×10^{-3}	3.041×10^{-3}	3.036×10^{-3}	3.009×10^{-3}
3.091×10^{-3}	3.053×10^{-3}	2.894×10^{-3}	

表 2 3 种不同方法的计算结果比较

Table 2 Comparison table of failure probability

	Procedure 1	Procedure 2	Procedure 3
$\hat{P}_F$	3.021×10^{-3}	2.951×10^{-3}	2.991×10^{-3}
COV	10.8%	12.07%	9.93%

2.2 数值算例 2

本部分考虑非线性结构动力学系统. 对于非线性系统，首先根据 Poisson 假设及 Rice 公式, 将非线性方程线性化, 线性化原理是非线性与线性方程对指定的安全域边界具有相同的平均上穿率 [11].

考虑零均值，具有单边谱密度 G_0 的稳态高斯白噪声激励的 Duffing 振子

$$\ddot{X}(t) + 2\beta\varpi_0\dot{X}(t) + \varpi_0^2[X(t) + \varepsilon X^3(t)] = \sqrt{r}W(t) \tag{12}$$

安全域为 $D = \{(x, \dot{x}) : |x| < b(t), \dot{x} \in R\}$，$\varepsilon \geqslant 0$, β, ϖ_0 表示 $\varepsilon = 0$ 时线性振子的阻尼与自然频率，且 $G_0 = \gamma/(2\pi)$. $(x(t), \dot{x}(t))$ 的稳态概率密度函数为

$$f(x, \dot{x}) = A\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\Big(x^2 + \frac{\varepsilon}{2}x^4\Big) - \frac{\dot{x}^2}{2\dot{\sigma}_0^2}\right]$$

式中，$A^{-1} = \pi\sqrt{\dfrac{G_0}{4\beta\varepsilon}}\exp\left(\dfrac{1}{8\varepsilon\sigma_0^2}\right)\mathrm{K}_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{8\varepsilon\sigma_0^2}\right)$，$A$ 是归一化参数，$\mathrm{K}_{\frac{1}{4}}$ 是修正 Bessel 函数，其中：$\sigma_0^2 = \dfrac{\pi G_0}{4\beta\varpi_0^3}$，

$\dot{\sigma}_0^2 = \varpi_0^2\sigma_0^2$，表示当 $\varepsilon = 0$ 时，$X(t), \dot{X}(t)$ 的稳态方差. 据 Rica 公式 [17-18]，非线性方程的平均上穿率为

$$V_X^+(x) = \dot{\sigma}_0^2 A \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(x^2 + \frac{\varepsilon}{2}x^4\right)\right] \tag{13}$$

等效线性化方程设为

$$\ddot{Y}(t) + 2\beta\varpi_0\dot{Y}(t) + \varpi_e^2 Y(t) = \sqrt{\gamma}w(t) \tag{14}$$

式中 ϖ_e 是等效线性化参数.

平均上穿率为

$$V_Y^+(x) = \frac{\dot{\sigma}_Y}{2\pi\sigma_Y}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}x^2\right) \tag{15}$$

式中 $\sigma_Y^2 = \dfrac{\pi G_0}{4\beta\varpi_0\varpi_e^2}, \dot{\sigma}_Y^2 = \sigma_Y^2\varpi_e^2$. 则当

$$V_X^+(b(t)) = V_Y^+(b(t)) \tag{16}$$

即可得到线性化参数 ϖ_e 值，若不能得到 ϖ_e 的解析值，亦可用数值方法获得.

此时 Duffing 振子对于安全域边界 $b(t)$ 的首穿失效概率为

$$P_F = P\{\exists\, t \in (0,T)|X(t)| > b(t)\} \approx$$
$$P\{\exists\, t \in (0,T), |Y(t)| > b(t)\}$$

在 Duffing 振子中，令 $\beta = 0.05$, $\gamma = 0.3$, $\varpi_0 = 1.0\,\text{rad/s}$, $T = 15\,\text{s}$, 安全域边界取常数边界 $b(t) = k\sigma_0$, 等效线性系统的脉冲响应函数为 [11]

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d}\exp(-\beta\omega_0 t)\sin(\omega_d t)$$

且 $\omega_d = \sqrt{\omega_e^2 - (\beta\omega_0)^2}$，$\Delta t = 0.05$，$n = 300$.

本文共进行 3 组实验，即非线性参数安全域边界分别为 $\varepsilon = 0.1$，$b(t) = 3\sigma_0$；$\varepsilon = 2$，$b(t) = 1.5\sigma_0$；$\varepsilon = 0.5$，$b(t) = 2.5\sigma_0$ 时，据方程 (16) 每组参数的等效线性化参数分别 $\varpi_e = 1.310\,634$, $\varpi_e = 2.164\,058$, $\varpi_e = 1.858\,361$.

利用本文方法每组参数共进行 15 次模拟，每次模拟的样本数 $M = 100$. 当 $\varepsilon = 0.1$, $b(t) = 3\sigma_0$, $\varpi_e = 1.310\,634$ 时，可得 15 次首穿失效概率的估计值如表 3. 根据非线性方程 (12) 分别取 10^6 和 10^8 个样本，利用 MCS 方法得到首穿失效概率的估计值，再根据等效线性化方程 (14)，取 3 组参数 15 次模拟结果的算数平均值作为最终的估计值，并与 MCS 估计比较，可见表 4，表 4 显示了本文方法得正确性与有效性.

表 3 $\varepsilon = 0.1$，$b(t) = 3\sigma_0 = 3.674$ **的失效概率**

Table 3 The value of failure probability $\varepsilon = 0.1$，$b(t) = 3\sigma_0 = 3.674$

4.761×10^{-5}	4.261×10^{-5}	4.308×10^{-5}	4.228×10^{-5}
4.446×10^{-5}	4.215×10^{-5}	4.302×10^{-5}	4.208×10^{-5}
4.476×10^{-5}	4.528×10^{-5}	4.087×10^{-5}	4.682×10^{-5}
4.659×10^{-5}	4.504×10^{-5}	4.165×10^{-5}	

表 4 本文方法与蒙特卡罗法的计算结果比较

Table 4 Comparison table of failure probability

$b(t)$	$\hat{P}_F$	COV/%	MCS
$3\sigma_0(\varepsilon = 0.1)$	4.442×10^{-5}	11.851 2	4.209×10^{-5}
$1.5\sigma_0(\varepsilon = 2)$	1.878×10^{-3}	14.936 9	2.011×10^{-3}
$2.5\sigma_0(\varepsilon = 0.5)$	9.054×10^{-7}	10.867 3	8.437×10^{-7}

3 总 结

本文将 Lambros 提出的区域分解方法进一步完善和改进，并将改进方法与区域分解法及 S.K.Au 的重要样本法进行比较，比较结果显示此 3 种方法同样有效. 本文并将之推广至非线性结构动力学场合，利用的是等效线性化方法，是根据 Rice 公式, 将非线性与线性方程对指定的安全域边界具有相同的平均上穿率作为线性化的原理，相比 mean square 线性化原理对于研究首次穿越失效问题本文方法是更加合理的，而且如无法得到非线性系统平均上穿率的解析表达式，可利用 MCS 等方法得到非线性系统平均上穿率的值. 最后的数值例子也显示了方法的的正确性与有效性.

参 考 文 献

1 Proppe C, Pradlwarter HJ, Schueller GI. Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics. *Probability Engineering Mechanics*, 2003, 18(3): 1-15

2 Spencer BF, Bergman LA. On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynam*, 1993(4): 357-372

3 Li W, Xu W. Stochastic optimal control of first passage failure for coupled Duffing-Van der Pol system under Gaussian white noise excitations. *Chaos Solitons* & *Fractal*, 2005, 25(5): 1221-1228

4 Li W, Xu W. First passage problem for strong nonlinear stochastic dynamical system. *Chaos Solitons* & *Fractal*, 2006, 28(2): 414-421

5 徐伟, 孙春艳, 孙建桥等. 胞映射方法的研究和进展. 力学进展，2013, 43(1): 91-100 (Xu Wei, Sun Chunyan, Sun Jianqiao, et al. Development and study on cell mapping methods. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 91-100 (in Chinese))

6 徐伟, 李伟, 靳艳飞等. 耦合 Duffing-van der Pol 系统的首次穿越问题. 力学学报，2005, 37(5): 620-625 (Xu Wei,Li Wei,Jin Yanfei, et al. First-passage problem for coupled Duffing-van der Pol sys-

tems.*Chinese Jounal of Theoretical and Applied Mechanics*,2005, 37(5): 620-625 (in Chinese))

7 任丽梅, 徐伟, 肖玉柱等. 基于重要样本法的结构动力学系统的首次穿越. 力学学报，2012, 44(3): 648-652 (Ren Limei,Xu Wei,Xiao Yuzhu, et al. First excursion probabilities of dynamical systems by importance sampling. *Chinese Jounal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(3): 648-652 (in Chinese))

8 Au SK, Beck JL. First excursion probability for linear systems by very efficient importance sampling. *Probability Engineering Mechanics*, 2001, 16(3): 193-207

9 Juu O, Hiroaki T. Importance sampling for stochastic systems under stationary noise having a specified power spectrum. *Probability Engineering Mechanics*, 2009, 24(4): 537-544

10 Pradlwarter HJ, Schueller GI. Assessment of low probability events of dynamical systems by controlled Monte Carlo simulation. *Probability Engineering Mechanics*, 1999, 14(3): 213-227

11 Olsen AI, Naess A. An importance sampling procedure for estimating failure probabilities of Non-linear dynamic systems subjected to random noise. *J Non-linear Mechanics*, 2007(42): 848-863

12 Katafygiotis LS, Cheung SH. Domain decomposr-tion method for calculating the failure probability of linear dynamic systems subjected to Gaussian stochastic loads. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006(20): 475-486

13 Yuen KV, Katafygiotis LS. An efficient simulation method reliability analysis of linear dynamical systems using simple additive rules of probability. *Probability Engineering Mechanics*, 2005, 20(2): 109-114

14 Zuev KM, Katafygiotis LS. The Horseracing Simulation algorithm for evaluation of small failure probabilities. *Probability Engineering Mechanics*, 2011, 26(2): 157-164

15 Der Kiureghian A.The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM. *Probability Engineering Mechanics*, 2000,15(2): 81-90

16 Valdebenito MA, Pradlwarter HJ, Schueller GI. The role of the design point for calculating failure probabilities in view of dimensionality and structural nonlinearities. *Structural Safety*, 2010(32): 101-111

17 Oksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application. 5th edn. Berlin: Springer, 1998

18 Soong TT, Grigoriu M. Random Vibration of Mechancial and Structural Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997

(责任编辑：周冬冬)

FIRST PASSAGE PROBABILITIES OF STRUCTURAL DYNAMICS SYSTEM BASED ON DOMAIN DECOMPOSITION [1)]

Ren Limei[*,†,2)] Xu Wei[*]

[*](*College of Science*，*Northwestern Polytechnical University*，*Xi'an* 710072，*China*)

[†](*College of Science*，*Changan University*，*Xi'an* 710064，*China*)

Abstract The first passage problems of linear and nonlinear dynamical systems excited by Gauss white noise are considered. For linear dynamical system, the failure domain can be described as a union of mutually exclusive events, and every event is completely described by a local design point. The paper uses standard Gaussian distribution instead of chi-square distribution to estimate the parameter of first passage probability. For nonlinear dynamical system, the equivalent linear system is carried out based on the out-crossing theory. The linearization principle is that nonlinear and linear systems have the same up-crossing rate for a specified threshold. Finally the paper gives two examples. The results show that the method of the paper suggested is correct and effective by comparing with the Monte Carlo method.

Key words structural reliability, first passage probability, domain decomposition, equivalent linearization

Received 12 December 2012, revised 13 February 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10932009, 11172233) and the Special Fund of Chang'an University (CHD2011JC019).

2) Ren Limei, research interests: nonlinear stochastic dynamics. E-mail: renlm1014@126.com