

一类分段光滑非线性平面运动系统响应特性研究<sup>1)</sup>江 俊<sup>2)</sup> 高文辉

(西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

**摘要** 针对由一个线性子系统和一个非线性子系统构成的两自由度非自治分段光滑非线性平面运动系统的响应特性开展了研究. 该分段光滑非线性模型可用来确定对称转子/定子系统的主要碰摩响应, 且在反映非光滑系统典型特性上具有明显的特征: (1) 切换分界面是由两自由度坐标共同决定的一个幅值曲面; (2) 子系统周期解与分界面的擦碰, 不是发生在一个点上, 而是同时发生在解的所有点上; (3) 完整系统未发现由两子系统共同作用而产生的周期解. 因此, 对于该非光滑系统响应特性的研究, 很难直接利用目前有关非光滑系统平衡点和周期解分岔分析的方法. 为此, 尝试了根据子系统的响应特性, 划分出完整系统响应对分界面处切换的敏感区和非敏感区, 并针对非敏感区可由子系统解的特性求得完整系统的响应, 而针对敏感区通过子系统动力学特征的分析有助于解释完整系统响应的生成机制.

**关键词** 分段光滑系统, 平面运动, 切换敏感性, 多稳态解, 分岔

中图分类号: O322 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-342

## 引言

由于不连续系统在科学和工程领域中广泛的存在性, 随着分岔和混沌理论研究的不断深入, 在过去的二十多年中, 非光滑系统的分岔及其动力学行为吸引了越来越多的学者的关注, 文献 [1-3] 详细介绍了有关非光滑系统动力学方面的研究进展. 目前, 非光滑系统依据非连续度 (degree-of-discontinuity) 被分为 3 类: 非光滑连续系统、Filippov 系统和 (传统意义上的) 碰撞系统. 文献 [2] 对 3 类非光滑系统中在分界面上平衡点的分岔研究结果进行了全面的总结, 文献 [4] 对非光滑系统周期解不连续分岔进行了系统的研究, 给出了一般意义下的 Floquet 理论.

本文将基于非光滑系统动力学理论的观点, 对具有实际工程背景的两自由度对称转子/定子碰摩系统的响应特性进行分析. 该类系统方程属于非光滑连续系统, 即: 系统在切换面处具有连续的状态和连续的向量场, 但可能具有不连续的 Jacobi 矩阵. 这类系统可用于描述含有间隙或弹性约束而引起刚度突变的机械系统行为. 文献 [5] 研究了一类非光滑线性系统向量场对系统 Poincare 映射可微性的影响, 并讨论在 2 种临界情况附近数值仿真出现

的动力学新现象. 文献 [6] 研究了一类两自由度分段光滑线性系统发生 Neimark-Sacker 分岔和倍化分岔的条件, 通过建立 Poincare 映射, 数值求解得到了 2 种分岔现象.

对于本文研究的系统, 确切地说是一个两自由度非自治分段光滑非线性平面运动系统. 因此, 其有别于目前大多数研究的分段光滑线性系统, 且有别于通常研究的沿直线运动的两自由度非光滑系统. 由此, 本文所研究系统在反映非光滑系统典型特性上具有明显的特征: (1) 切换分界面是由两自由度坐标共同决定的一个幅值曲面; (2) 子系统周期解与分界面的擦碰, 不是发生在一个点上, 而是同时发生在解的所有点上; (3) 完整系统未发现由两子系统共同作用而产生的周期解. 由于目前有关非光滑系统平衡点和周期解分岔分析的方法并不直接适用于该平面运动系统的一般响应分析, 本文将尝试通过比较子系统的响应和完整系统的响应, 在参数空间中划分出完整系统响应对分界面处切换的敏感区和非敏感区, 并希望由此提出在非敏感区内非光滑完整系统响应的预测, 而对于敏感区内非光滑完整系统的响应, 希望通过子系统动力学特征的分析有助于解释其响应的生成机制.

2012-12-03 收到第 1 稿, 2012-12-06 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11172223).

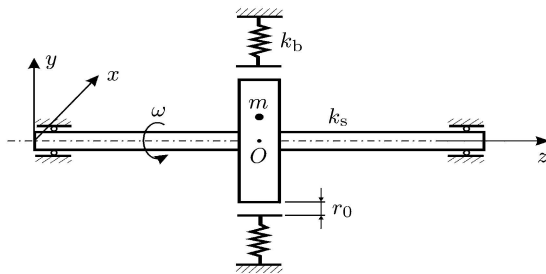
2) 江俊, 教授, 主要研究方向: 非线性动力学与控制、转子动力学和耦合振动. E-mail: jun.jiang@mail.xjtu.edu.cn

## 1 力学模型

本文讨论的是由 Jeffcott 转子和环形径向弹簧定子组成的对称转子/定子碰摩模型 (见图 1). 转子由一个无质量转轴和一个支撑在其中部、质量为  $m$  的转盘构成. 转盘半径为  $r_{\text{disk}}$ , 偏心距为  $e$ , 转轴的刚度为  $k_s$ , 转速为  $\Omega$ , 涡动速度为  $\Omega_w$ . 转子和定子之间的间隙为  $r_0$ , 定子的环形径向弹簧刚度为  $k_b$ . 本文将忽略定子的惯性和转子的陀螺效应, 且不考虑碰摩面的干摩擦效应. 转子/定子系统的运动方程可表示为

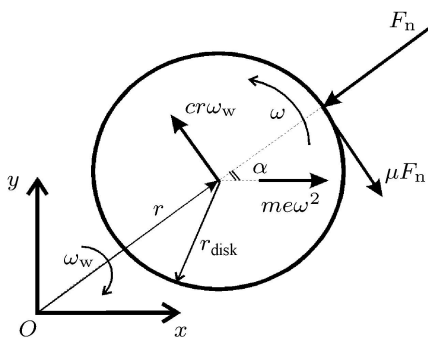
$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_s x + \theta k_b \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (x - \mu y) &= me\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + k_s y + \theta k_b \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (\mu x + y) &= me\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, 转子响应幅值为  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\theta$  为 Heaveside 函数, 给出系统在无碰摩的线性子系统和在有碰摩的非线性子系统之间切换的条件, 即



(a) 模型示意图

(a) Schematic plot of the model



(b) 模型在碰摩截面处的示意图

(b) Schematic plot of the model at the section of rubbing

图 1 对称转子/定子碰摩模型

Fig. 1 Symmetric rotor/stator model

$$\theta = \begin{cases} 0, & r < r_0 \\ 1, & r \geq r_0 \end{cases}$$

从非光滑动力学的角度, 该系统存在一个非光滑分界面  $\sigma = \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) | \sqrt{x^2 + y^2} - r_0 = 0\}$ , 此分界面是以转子系统幅值定义的, 只有大小而无方向. 该分界面将状态空间分为 2 个区域

$$v_1 = \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) | \sqrt{x^2 + y^2} < r_0\}$$

$$v_2 = \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) | \sqrt{x^2 + y^2} > r_0\}$$

其中,  $v_1$  区域称为分界面内, 系统的行为由线性运动方程控制,  $v_2$  区域称为分界面外, 系统的行为由非线性运动方程控制.

对方程 (1) 进行无量纲化, 且分别写出线性子系统方程

$$\left. \begin{aligned} X'' + 2\zeta X' + \beta X &= \Omega^2 \cos(\Omega\tau), \\ Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y &= \Omega^2 \sin(\Omega\tau), \end{aligned} \right\} (X, X', Y, Y') \in V_1 \quad (2a)$$

和非线性子系统方程

$$\left. \begin{aligned} X'' + 2\zeta X' + \beta X + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(X - \mu Y) &= \Omega^2 \cos(\Omega\tau), \\ Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(\mu X + Y) &= \Omega^2 \sin(\Omega\tau), \end{aligned} \right\} (X, X', Y, Y') \in V_2 \quad (2b)$$

其中, 无量纲参数为

$$X = \frac{x}{e}, \quad Y = \frac{y}{e}, \quad R_0 = \frac{r_0}{e}, \quad \beta = \frac{k_s}{k_b}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k_b m}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k_b}{m}}, \quad \Omega = \frac{\Omega}{\Omega_2}, \quad \tau = \Omega_2 t$$

无量纲幅值为  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , 相应的分界面和区域由对应变量的无量纲量表示, 并以大写字母表示, 如: 分界面记为

$$\Sigma = \{(X, X', Y, Y') | \sqrt{X^2 + Y^2} - R_0 = 0\} \quad (3)$$

## 2 子系统的周期解及其稳定性

由于所讨论的子系统均为周期激励的非自治系统, 因此, 下面将首先分析子系统的基本解——与外激励有相同周期的解及其稳定性. 假设周期解的形式为

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= A \cos(\Omega\tau + \varphi) \\ Y_0 &= A \sin(\Omega\tau + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中,  $A$  为周期解的振幅且大于或等于零,  $\varphi$  为响应的相位.

## 2.1 线性子系统的周期解

将周期解 (4) 代入线性子系统方程 (2a) 中, 可以确定振幅和相位的表达式为

$$A = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\beta - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\Omega}{\beta - \Omega^2}\right) \quad (5)$$

由于线性周期解总是稳定的, 因此, 主要确定该周期解的存在区间. 因为在本系统中, 一旦响应幅值超过分界面, 系统将不由线性系统方程控制, 由此可以通过分界面方程 (3) 很容易求得线性子系统周期解存在的边界条件

$$(R_0^2 - 1)\Omega^4 + R_0^2(4\zeta^2 - 2\beta)\Omega^2 + R_0^2\beta^2 = 0 \quad (6)$$

由方程 (6) 可以解得 2 个转速  $\Omega_L$  和  $\Omega_U$ . 当转速低于  $\Omega_L$  或高于  $\Omega_U$  时, 线性周期解的响应幅值在分界面内, 线性子系统的周期解存在. 而在 2 个临界转速之间, 即  $\Omega_L < \Omega < \Omega_U$ , 完整系统是不存在线性周期解的.

## 2.2 非线性子系统的周期解及稳定性

将周期解 (4) 代入非线性子系统方程 (2b) 中, 可以得到关于周期解振幅的表达式

$$a_2 A^2 + a_1 A + a_0 = 0 \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} a_2 &= (2\zeta\Omega - \gamma + \mu)^2 + (1 + \beta - \Omega^2)^2 \\ a_1 &= -2R_0[(1 + \beta - \Omega^2) + \mu(2\zeta\Omega - \gamma + \mu)] \\ a_0 &= R_0^2(1 + \mu^2) - \Omega^4 \end{aligned}$$

因为  $A$  必须取正实数, 所以由方程 (7) 可以得到一对解, 或没有解, 或一个 (满足正实数的) 解. 图 3 通过采用文献 [7-8] 中的方法可以得到关于周期解的特征方程为

$$\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} c_3 &= 4\zeta \\ c_2 &= 2\Omega^2 + 4\zeta^2 + 2\beta - a + 2 \\ c_1 &= 4\zeta\Omega^2 + 2\mu(2 - a)\Omega + 4\zeta(\beta + 1) - 2\zeta a \\ c_0 &= \Omega^4 + (4\zeta^2 - 2\beta + a - 2)\Omega^2 + 2\mu\zeta(2 - a)\Omega + \\ &\quad (1 + \beta)^2 + \mu^2(1 - a) - a(1 + \beta) \\ a &= R_0/A \end{aligned}$$

通过分析特征根的实部, 可以确定周期解的稳定性. 通过分析分岔点, 可以方便地得到周期解的稳定边界.

鞍结分岔对应于特征方程有零特征根, 由式 (8) 可得鞍结分岔的条件为  $c_0 = 0$ , 即

$$\begin{aligned} \Omega^4 + (4\zeta^2 - 2\beta + a - 2)\Omega^2 + 2\mu\zeta(2 - a)\Omega + \\ (1 + \beta)^2 + \mu^2(1 - a) - a(1 + \beta) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由于  $a$  中含有幅值  $A$ , 可以通过联立求解方程 (7) 和 (9) 得到鞍结分岔的参数条件.

Hopf 分岔对应于特征方程存在一对纯虚特征根, 为此将  $\lambda = \pm i\Omega_0$  代入式 (8) 中, 并通过分离实部和虚部及消去  $\Omega_0$  得到 Hopf 分岔方程

$$\begin{aligned} 16(4\zeta^2\beta + 4\zeta^2 - \mu^2)(\zeta^2 + \Omega^2)A^2 + \\ 16R_0(\mu\beta - 2\zeta^2)(\Omega^2 + \zeta^2)A + 4R_0^2(\zeta^2 - \mu^2\Omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

同样, 通过联立求解方程 (7) 和 (10) 可得到 Hopf 分岔的参数条件.

## 2.3 子系统周期解及稳定性的实例

为了使读者对上述分析有更直观的认识, 下面给出线性和非线性子系统周期解及其稳定性的一个实例. 在下面的分析中, 将固定下述系统参数不变  $\zeta = 0.05, \beta = 0.04, R_0 = 1.05$ .

图 2 给出了参数平面  $\Omega$ - $\mu$  内线性子系统和非线性子系统周期解存在及分岔边界, 其中, 虚线  $\Omega_L = 0.1536$  和  $\Omega_U = 0.8540$  给出了线性子系统周期解存在的边界; 黑色实线表示非线性子系统周期解的鞍结分岔边界,  $SN_1$  和  $SN_2$  构成一对周期解的存在区域的边界, 而  $SN_3$  则为一对新的周期解开始的边界, 但这对解有一个解幅值为负, 没有意义而被略去; 灰色实线给出了非线性子系统周期解发生 Hopf 分岔的边界, 曲线附近括号内的正负号分别表示大振幅 (绝大部分解大于分界面) 和小振幅 (全部或绝大部分解小于分界面) 的周期解分支.

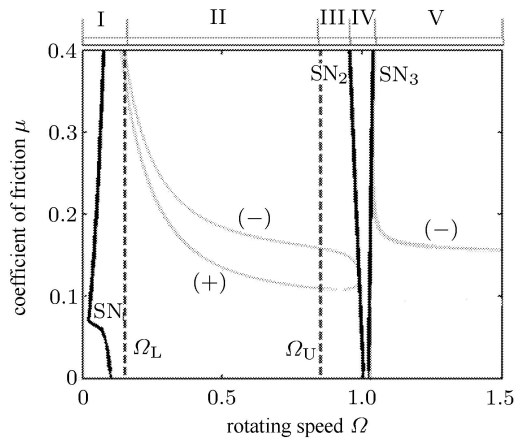


图 2 线性子系统和非线性子系统周期解存在及分岔边界

Fig. 2 The existence and bifurcation boundaries of periodic solutions of the linear and nonlinear sub-systems

在鞍结分岔线  $SN_3$  附件, 新产生的一个非线性小振幅解周期解的 Hopf 分岔较为复杂. 为此, 图 3 给出了该区域的局部放大图. 可以看出: 周期解分支有 2 条 Hopf 分岔线, 分别标为  $(-)_1$  和  $(-)_2$ , 且均与鞍结分岔线  $SN_3$  有一个切点. 由于该周期解在产生时为不稳定解, 其通过 Hopf 分岔线  $(-)_1$  时, 发生亚临界的 Hopf 分岔而变为稳定的周期解, 但当该小振幅周期解通过 Hopf 分岔线  $(-)_2$  时, 将发生超临界的 Hopf 分岔.

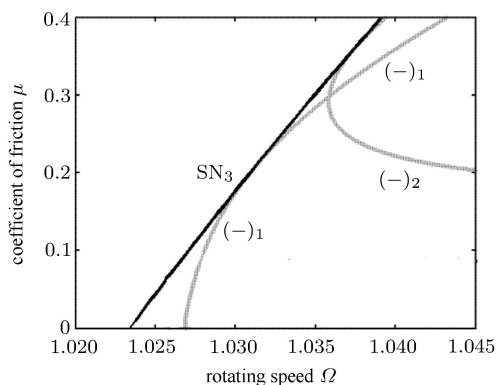


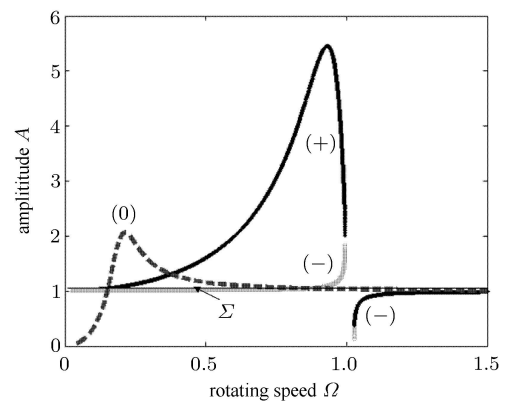
图 3 线性子系统和非线性子系统周期解存在及分岔边界的局部放大图

Fig. 3 The zoom plot of The existence and bifurcation boundaries of periodic solutions of the linear and nonlinear sub-systems

由于线性子系统的解只在分界面内的区域  $v_1$  有意义, 而非线性子系统的解只在分界面外的区域  $v_2$  有意义, 因此, 有必要通过考查解的幅值以判断其对完整系统的响应是否起作用或有贡献. 图 4 给出了  $\mu = 0.08$  时线性子系统周期解振幅 (虚线) 和非线

性子系统周期解振幅 (粗实线) 随转速变化响应曲线. 分界面由细实线标出.

由图 4 可以看出: 线性周期解在  $\Omega > \Omega_L = 0.1536$  时振幅超过分界面; 而在  $\Omega > \Omega_U = 0.8540$  时, 振幅再次回到分界面内, 但其幅值与分界面极为接近. 对于  $0.025 < \Omega < 0.9956$  ( $SN_1$  与  $SN_2$  之间) 的一对非线性周期解, 大振幅的周期解 (+) 始终稳定, 而小振幅的周期解 (-) 则始终不稳定. 值得注意的是: 大振幅的周期解 (+) 在  $\Omega < \Omega_L = 0.1536$  范围内, 其振幅也是小于分界面的. 实际上, 该情况对于  $\mu$  取任何值情况下都成立. 这也就是说: 非线性周期解的幅值在  $\Omega < \Omega_L$ , 即图 2 虚线  $\Omega_L$  左侧, 均是小于分界面的; 而相应的小振幅周期解 (-) 在  $\Omega > \Omega_U$ , 即图 2 虚线  $\Omega_U$  右侧, 均是大于分界面的. 由此可以得出这对非线性子系统周期解存在的区间: 在  $\Omega_L$  与  $\Omega_U$  之间, 存在大振幅的周期解; 而在  $\Omega_U$  与  $SN_2$  之间, 则同时存在大振幅和小振幅的周期解.

图 4 周期解振幅及稳定性随转速变化图  $\mu = 0.08$ . 标有 (0) 的虚线为线性子系统周期解的振幅, 标有 (+) 和 (-) 的粗实线为非线性子系统的周期解的振幅, 其中: 黑色表示稳定解, 灰色表示非稳定解. 细实线标出了分界面Fig. 4 Response of periodic solutions vs. rotating speed when  $\mu = 0.08$ . The dashed curve stands for solution of the linear sub-system, the black curve for the stable solution and the gray curve for the unstable one of the nonlinear sub-system

对于通过鞍结分岔  $SN_3$  (在本情况下  $\Omega = 1.026$ ) 产生的一个 (有意义) 非线性子系统周期解, 其出现时为不稳定的, 然后通过亚临界 Hopf 分岔变为稳定. 但由于该周期解的振幅始终小于分界面 (见图 4), 所以, 非线性子系统的周期解实际上从鞍结分岔线  $SN_2$  以右就不存在了.

图 5 给出了  $\mu = 0.15$  时线性子系统周期解振幅 (虚线) 和非线性子系统周期解振幅 (粗实线) 随转速变化响应曲线. 其除周期解的幅值有变化外, 最主要

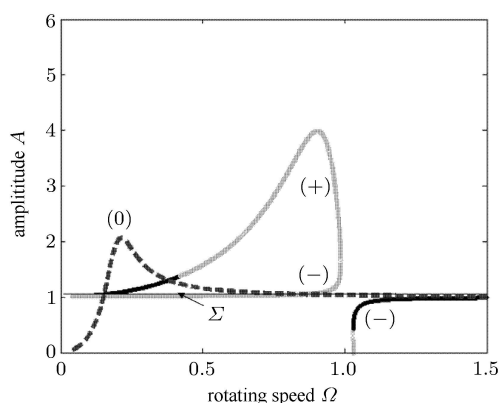


图5 周期解振幅及稳定性随转速变化图  $\mu = 0.15$ . 标有 (0) 的虚线为线性子系统周期解的振幅, 标有 (+) 和 (-) 的粗实线为非线性子系统的周期解的振幅, 其中: 黑色表示稳定解, 灰色表示非稳定解. 细实线标出了分界面

Fig. 5 Response of periodic solutions vs. rotating speed when  $\mu = 0.08$ . The dashed curve stands for solution of the linear sub-system, the black curve for the stable solution and the gray curve for the unstable one of the nonlinear sub-system

的是 (+) 分支的非线性子系统周期解发生了 Hopf 分岔. 各分岔点可以从图 2 中  $\mu = 0.15$  直线与各分岔线的交点读出.

### 3 切换非敏感区内完整系统的响应

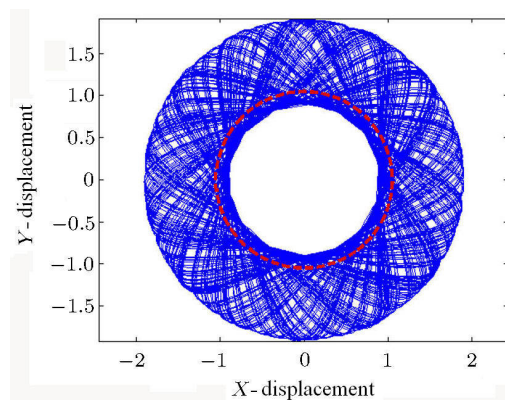
在文献 [8] 中通过采用方程的分段 (子系统) 分析, 然后在参数平面内进行拼接的方法, 得到了非光滑完整系统 (2) 在图 2 中  $SN_2$  线以左区域 (即标有 I-III 区间) 的全局特性. 由文献 [8] 的结果可以看出: 尽管在该区域内存在 2 个特殊的转速 ( $\Omega_L$  和  $\Omega_U$ ), 在此转速下, 线性子系统的周期解和非线性系统的一个周期解将与分界面发生类似擦碰的行为 (轨迹与分界面相切, 且通过分界面的法向速度为零), 但此非光滑系统并未出现通常非光滑系统在擦碰处出现的复杂分岔. 分析其原因, 一方面是周期解的轨迹与分界面的擦碰不是发生在单点上, 而是同时发生在周期解的所有点上, 所以, 实际上周期解的轨迹与分界面是重合的; 另一方面 (也是更主要的原因), 在此转速下, 线性子系统和非线性系统的一个周期解会同时与分界面重合, 表明在这此参数值处该非光滑系统的两子系统之间的切换具有更好的光滑性.

下面将结合上一节子系统周期解的分析结果, 对文献 [8] 中使用的方法并得到合理性结果进行解释. 为此提出非光滑系统整体响应对切换的敏感性概念, 即: 非光滑系统的整体响应特性是仅由单个子系统的响应特性确定, 还是必须完全计及各子系

统之间的切换才能确定.

文献 [8] 主要研究图 2 标注为区间 I — III 对应的区域, 基于上面的概念, 可将该区域定义为切换非敏感区域. 其中, 非光滑完整系统在区间 I 对应区域的行为完全由线性子系统决定; 而在区间 II 对应的区域内的行为完全由非线性子系统决定; 对应区间 III 对应的区域, 系统行为由两个子系统各自的行为, 而非两者之间的切换决定.

由上节子系统的周期解分析可知: 在区间 I 对应的区域内, 非线性子系统实际上没有满足分界面约束条件的解, 因此, 非光滑完整系统的响应只能由线性子系统方程控制; 在区间 II 对应的区域内, 线性子系统没有满足分界面约束条件的解, 因此, 非光滑完整系统的响应只能由非线性子系统方程控制. 例如, 非线性子系统稳定周期解的 Hopf 分岔曲线实际上准确定义出了非光滑完整系统出现准周期响应的边界. 值得注意的是: 尽管非线性子系统方程可以给出非光滑完整系统响应特性的边界, 但单独的非线性子系统方程并不能准确给出非光滑完整系统响应的精确定量形式. 这是因为, 在完整系统发生准周期响应时, 其幅值要在分界面内外, 亦即在线性子系统和非线性子系统之间切换. 图 6 给出了在相同参数下通过非光滑完整系统和通过非线性子系统求解出的准周期响应的轨迹, 从图中可以看出在响应幅值和响应方式上均有明显差别. 在区间 III 对应的

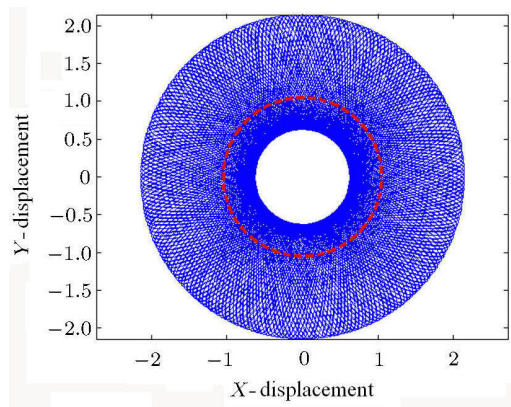


(a) 由完整系统求解出的响应轨迹

(a) Responses obtained by whole system

图6 准周期响应时系统的轨迹图, 系统参数为  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega = 0.45$  其中: 虚线表示分界面位置, 实线为表示转子中心运动的轨迹

Fig. 6 Trajectories of quasi-periodic responses when  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega = 0.45$ . The dashed curve stands for the shift boundary, the solid curve for the trajectories



(b) 由非线性子系统求解出的响应轨迹  
(b) Responses obtained by nonlinear sub-system

图 6 准周期响应时系统的轨迹图, 系统参数为  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega = 0.45$   
其中: 虚线表示分界面位置, 实线为表示转子中心运动的轨迹 (续)

Fig. 6 Trajectories of quasi-periodic responses when  $\mu = 0.15$ ,  
 $\Omega = 0.45$ . The dashed curve stands for the shift boundary, the solid  
curve for the trajectories (continued)

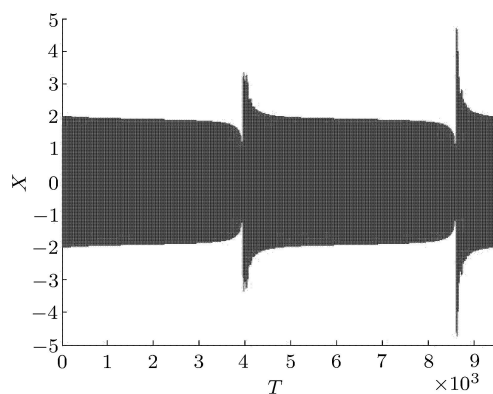
区域内, 非线性子系统实际存在着余维 2 的分岔点 (鞍结分岔点与 Hopf 分岔点相交处), 且非线性子系统不稳定周期解也存在 (其幅值也大于分界面), 但从典型完整系统的响应看, 在 Hopf 分岔线以下为线性子系统的周期解与非线性子系统的稳定周期解共存<sup>[7-9]</sup>, 在 Hopf 分岔线以上为线性子系统的周期解与非线性子系统的无穷远解<sup>[7]</sup>. 也就是说, 完整系统的响应还是可以由子系统的响应拼接出来的. 其原因在于, 子系统间不存在促使其轨道向分界面运动

的动力学机制, 完整系统的响应对切换不敏感.

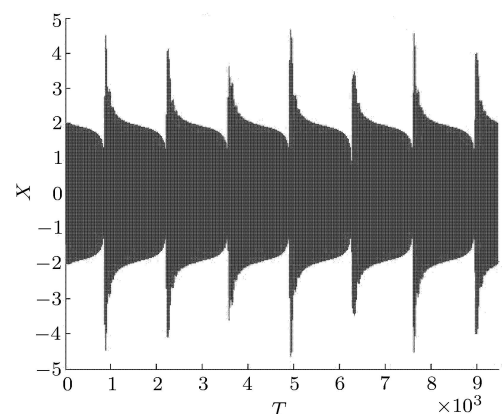
#### 4 切换敏感区内完整系统的响应

由上节的讨论可以看出: 子系统是否有驱动子系统轨迹向分界面运动的动力学结构, 是完整系统响应对切换敏感性的前提条件. 从第 3 节子系统周期解的分析可知: 在区间 IV 对应的区域中 (曲线  $SN_2$  和  $SN_3$  之间), 非线性子系统无任何周期解. 而在区间 V 对应的区域内, 非线性子系统的周期解由于幅值小于分界面, 在完整系统中是不发挥作用的. 因此, 有必要研究在这 2 个区域内, 非线性子系统所具有的动力学特征, 以帮助理解在此 2 个区域内完整系统响应的特征. 由于篇幅的限制, 本文将着重研究在  $\zeta = 0.05$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $R_0 = 1.05$  且  $\mu = 0.08$  时系统在区间 IV 和区间 V 上的动力学行为特征.

在区间 IV 内, 非线性子系统存在混沌响应, 其在  $\Omega \approx 0.9958$  时一对周期解发生鞍结分岔后产生 I 型阵发性混沌. 图 7 给出了随转速  $\Omega$  偏离鞍结分岔点, 非线性子系统位移的时间历程曲线. 可以看出, 层流相的长度会越来越短, 紊流相不断加密, 混沌性增强. 该混沌响应的存在区间实际上跨过了区间 IV 的右边界 ( $SN_3$  线), 在  $\Omega \approx 1.0277$  附近消失. 由图 3 和图 4 可以了解到, 在该点附近非线性子系统的周期解发生亚临界 Hopf 分岔而变为稳定的周期解, 同时产生了一个不稳定的准周期解. 通过初步分析可以判断: 非线性子系统的混沌吸引子与该不稳定的准周期解发生边界激变而消失.



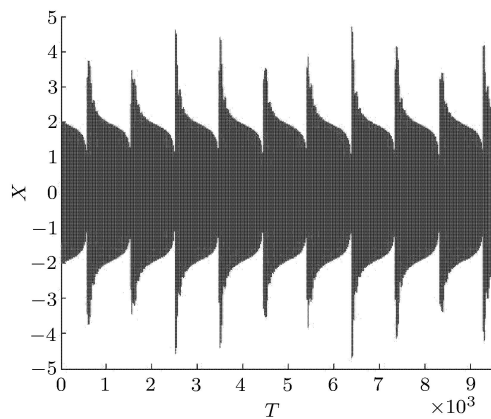
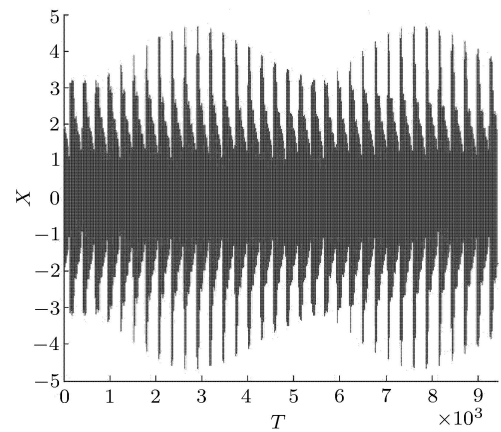
(a)  $\Omega = 0.9956$



(b)  $\Omega = 0.9958$

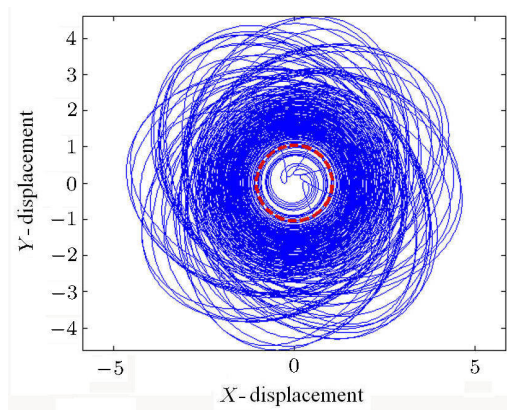
图 7 x 的时间响应历程图

Fig. 7 Time history of x

(c)  $\Omega = 0.99606$ (d)  $\Omega = 1.0$ 图7  $x$  的时间响应历程图Fig. 7 Time history of  $x$ 

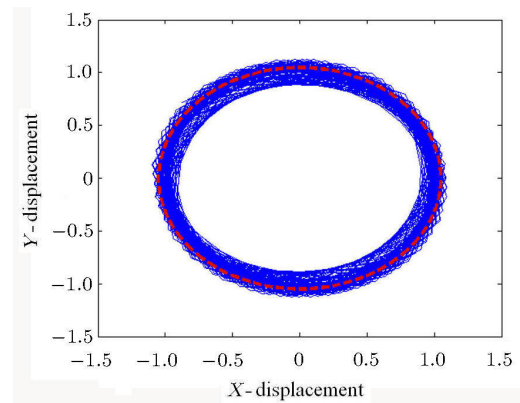
对于完整系统,在上述非线性子系统存在混沌的转速区段内的响应为:分界面以内的周期响应和在分界面两侧不断切换的准周期响应(见表1).对于非光滑系统,把子系统的动力学行为与分界面结合起来进行合成,有时可以较好地解释或预测出完整系统的响应<sup>[10]</sup>.由于本文所讨论的系统,状态空间的维数高,子系统的响应行为复杂,在此只能给出推测性的解释:在分界面外,非线性子系统的大幅混沌响应会驱动系统轨迹跨越分界面而进入分界面内.由于线性子系统的响应为幅值接近于分界面的周期

响应,在状态空间内穿过分界面的轨迹会被吸引至分界面附近,并可能再次穿出分界面.非线性子系统的混沌响应经过在分界面内反复由线性子系统的支配而失去本身的混沌特征(如折迭),因而使得完整系统出现了准周期响应.图8给出了非线性子系统的混沌响应和完整系统准周期响应的轨迹图,可以看出非线性子系统混沌在分界面内的轨迹有明显的折迭特征.实际上,由于线性系统的稳定周期解特别接近于分界面,使得完整系统由于非光滑切换而产生的准周期响应对初值和扰动非常敏感.



(a) 非线性子系统的混沌响应

(a) The chaotic response of the nonlinear sub-system



(b) 完整系统的准周期响应

(b) The quasi-periodic response of the whole system

图8 系统运动的轨迹,虚线为分界面,实线为系统的响应轨迹.系统参数为  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega = 1.0$ Fig. 8 Trajectories of the system when  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega = 1.0$ . The dashed curve stands for the shift boundary, the solid curve for the trajectories

从完整系统在下一个响应区段 ( $1.0277 < \Omega < 1.037$ ) 上的响应行为,也可以侧面说明上述解释的合理性.当非线性子系统的混沌响应消失后,完整系统的准周期响应也随即消失(见表 1).因为在此区段中,非线性子系统只有振幅小于分界面的稳定周期解和一个刚刚产生的不稳定准周期解,对于完整系统而言,分界面外无任何解,所以,其响应仅由线性子系统决定.在此需要说明的是,由于没有数值求得非线性子系统的不稳定准周期解,因此,只能根据 Hopf 分岔的特征进行推测,在此区段内不稳定准周期解的幅值仍然在分界面以内(见图 4).

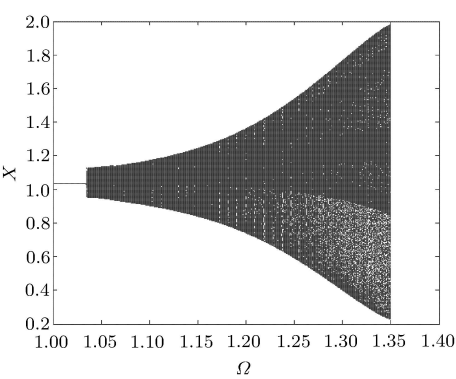
表 1 完整系统及其子系统在图 2 中区间 IV 和 V 内的响应特性 ( $\mu = 0.08$ )

Table 1 The response characteristics of whole system and sub-systems in interval IV and V of Fig.2 when  $\mu = 0.08$

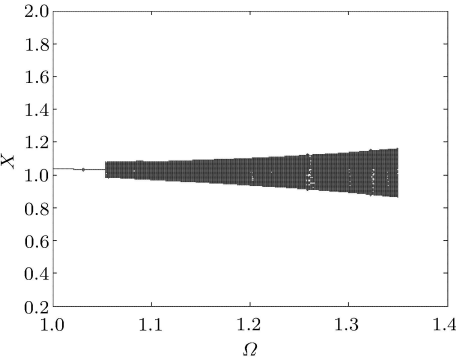
| rotating speed $\Omega$ | linear sub-system | nonlinear sub-system | non-smooth wholesystem |
|-------------------------|-------------------|----------------------|------------------------|
| 0.996~1.028             |                   | chaos                | periodic-              |
| 1.028~1.037             |                   | no solution          | quasi-periodic         |
| 1.037~1.057             |                   |                      | periodic-              |
|                         |                   |                      | quasi-periodic         |
| 1.057~1.275             | periodic -        | quasi-periodic       | periodic-              |
|                         |                   |                      | quasi-periodic         |
| 1.275~1.355             |                   |                      | quasi-periodic         |
|                         |                   |                      | quasi-periodic         |
| 1.355~1.5463            |                   | quasi-periodic       | periodic-              |
|                         |                   |                      | quasi-periodic         |

Note: In the table, “-” stands for the magnitude of solution within and “|” for that across the switching surface. The solution in *italics* indicates that the solution is unstable.

而当  $\Omega > 1.037$  后,完整系统的响应除振幅小于分界面的周期响应外,接连出现了两个准周期响应(见图 9).而在这 2 个准周期产生的区段 ( $1.037 < \Omega < 1.057$ ) 内,对完整系统响应有实际意义的非线性子系统解只可能是幅值大于分界面的不稳定解,其中必定包含已知的不稳定准周期解.该不稳定准周期解直到  $\Omega = 1.275$  时才变为稳定的准周期响应,所以其对这 2 个新的准周期响应的出现应该没有作用.所以,目前对于完整系统的这 2 个准周期解的产生,单从子系统的合成,还是不能给出满意的解释.另外,由图 9 可以注意到:2 个准周期响应从出现起,就有一定的幅值,而不是像通常经由 Hopf 分岔而产生解的形式.



(a) 准周期响应 1  
(a) Quasi-periodic response-I



(b) 准周期响应 2 (部分)  
(b) Quasi-periodic response-II

图 9 完整系统响应随转速变化的分岔图 ( $\mu = 0.08$ )

Fig. 9 Response of whole system vs. rotating speed when  $\mu = 0.08$

基于上面对切换敏感区的讨论,可以看出:在该区域中,非线性子系统实际上不具有对完整系统有意义的基本解(幅值大于分界面的周期解).取而代之的是混沌响应,无解或不稳定准周期解,由此增加了非光滑系统响应的复杂性,也使得某些完整系统响应的出现无法从子系统响应特性的合成来给出合理解释.

5 结 论

本文针对由对称转子/定子碰摩系统提炼出的一个两自由度非自治分段光滑非线性平面运动系统的响应特性开展了研究.该分段光滑非线性模型在反映非光滑系统典型特性上具有明显的特征:(1) 切换分界面是由两自由度坐标共同决定的一个幅值曲面;(2) 两子系统的周期解往往是同时整体与分界面擦碰(重合),因此在这样的点上系统具有很好的光滑性,而不会发生一般非光滑系统擦碰时出现的复杂分岔.

通过对子系统基本解——周期解的稳定性和分岔分析以及其与非光滑完整系统的响应的关系分析,本文提出了非光滑系统的整体响应对切换的敏感性概念.依据此概念,本文随后将该非光滑系统的参数空间划分为:响应对切换的敏感区和响应对切换的非敏感区.在响应对切换的非敏感区域内,可以通过求解子系统的解来确定完整系统的响应,或通过子系统响应特性的分析(如分岔分析)得到完整系统响应的特性(分岔特性).对于响应对切换的敏感区,个别情况可以通过各个子系统动力学特征及其在界面的切换和拼接可以预测或解释完整系统响应的生成机制,但对一般情况下,非光滑完整系统的响应完全不能从子系统的响应特征分析得来,因此仍需要开展大量深入的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Leine RI, van Campen DH. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical Systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2006, 25: 595-616
- 2 di Bernardo M, Nordmark A, Olivar G. Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise smooth and impacting dynamical systems. *Physica D*, 2008, 237: 119-136
- 3 di Bernardo M, Budd C, Champneys A, et al. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM Review*, 2008, 50(4): 629-701
- 4 Leine RI, Nijmeijer H. Dynamics and bifurcations of non-smooth

- mechanical systems. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Berlin: Springer-Verlag, 2004. 18
- 5 胡海岩. 分段线性系统动力学的非光滑分析. *力学学报*, 1996, 28(4): 483-488 (Hu Haiyan. Nonsmooth analysis of dynamics of a piecewise linear system. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(4): 483-488 (in Chinese))
- 6 徐慧东, 谢建华. 一类两自由度分段光滑线性系统的分岔与混沌. *振动工程学报*, 2008, 21(3): 279-285 (Xu Huidong, Xie Jianhua. Bifurcation and chaos of a class of 2dof piecewise linear systems. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(3): 279-285 (in Chinese))
- 7 Jiang J, Ulbrich H. Stability analysis of sliding whirl in a nonlinear jeffcott rotor with cross-coupling stiffness coefficients. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24(3): 269-283
- 8 Jiang J. Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 57 (3): 351-361
- 9 高文辉, 郭旭, 江俊. 基于胞参考点映射法对转子/定子碰摩响应的全局分析. *动力学与控制学报*, 2011, 9(4): 363-367 (Gao Wenhui, Guo Xu, Jiang Jun. Study on the global response characteristics of a rotor/stator contact system through point mapping under cell reference method. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(4): 363-367 (in Chinese))
- 10 李绍龙, 张正娣, 吴天一等. 广义 BVP 电路系统的振荡行为及其非光滑分岔机理. *物理学报*, 2012, 61(6): 060504 (Li Shaolong, Zhang Zhengti, Wu Tianyi, et al. Oscillating behavior and bifurcation mechanism of generalized BVP circuit. *Journal of Chinese Physics*, 2012, 61(6): 060504 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

## STUDY ON RESPONSE CHARACTERISTICS OF A CLASS OF PIECEWISE SMOOTH NONLINEAR PLANAR MOTION SYSTEMS<sup>1)</sup>

Jiang Jun<sup>2)</sup> Gao Wenhui

(State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** In this paper, the response characteristics of a two-degree-of-freedom non-autonomous piecewise smooth nonlinear system, which consists of linear and nonlinear subsystem, are investigated. The piecewise smooth system can be used to determine the most important responses of a rotor/stator rubbing systems, and possesses some following peculiar features: (1) the switching surface is defined by the two displacement coordinates of the system and is a magnitude surface in the state space; (2) the touch of the periodic solutions of subsystems with the switching surface occurs always simultaneously at all points of the solution to make it different from gazing bifurcations or phenomena in the usual non-smooth systems; (3) there is no periodic solution formed through connection of trajectories from two subsystems. So some techniques developed for the bifurcation analysis of equilibriums or periodic solutions are not directly applicable to the system. Thus, according to the dynamical characteristics of subsystems, this paper tries to classify the parameter regions into the switching sensitive and insensitive regions. In this way, the responses of whole system in the switching insensitive regions can be obtained from the analysis of the responses of subsystems. For some responses of the whole systems in the switching sensitive regions, explanation is given for their occurrence based on the dynamical characteristics of subsystems.

**Key words** piecewise smooth systems, planar motion, switch sensitivity, multi-stability, bifurcation.

Received 3 December 2012, revised 6 December 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172223).

2) Jiang Jun, professor, research interests: nonlinear dynamics and control, rotor dynamics and coupled vibration. E-mail: jun.jiang@mail.xjtu.edu.cn