

碰撞振动系统中周期轨擦边诱导的混沌激变¹⁾

冯进钤^{*,2)} 徐伟[†]

^{*}(西安工程大学理学院, 西安 710048)

[†](西北工业大学理学院, 西安 710072)

摘要 基于图胞映射理论, 提出了一种擦边流形的数值逼近方法, 研究了典型 Duffing 碰撞振动系统中擦边诱导激变的全局动力学. 研究表明, 周期轨的擦边导致的奇异性使得系统同时产生 1 个周期鞍和 1 个混沌鞍. 当该周期鞍的稳定流形与不稳定流形发生相切时, 边界激变发生使得该混沌鞍演化为混沌吸引子. 噪声可以诱导周期吸引子发生擦边, 这种擦边导致了 1 种内部激变的发生, 表现为该周期吸引子与其吸引盆内部的混沌鞍发生碰撞后演变为 1 个混沌吸引子.

关键词 碰撞振动系统, 擦边流形, 擦边诱导激变, 图胞映射方法

中图分类号: O322 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-315

引言

非光滑动力系统作为动力学的一个分支, 广泛地存在于多个科学领域. 如电力系统中 DC-DC 变换器、力学中软碰撞和干摩擦、控制系统的滑动、生态种群系统和通信交通系统中流的模型等. 近年来, 关于非光滑系统动力学的研究引起了国内外大量学者的关注^[1-5].

经过长期的研究, 人们发现当系统的轨线与碰撞面发生零速度擦边时, 对应的 Poincare 映射将出现奇异性, 系统将发生分岔, 通常被称作擦边分岔或 C 分岔^[6-9]. 擦边分岔广泛地存在于碰撞振动系统和分段光滑系统中, 表现出复杂的动力学特性. 目前, 对于擦边分岔的研究, 主要集中在不连续映射的局部分析. 研究表明, 擦边可以诱导周期运动直接跃迁为混沌运动. 此外, 擦边可以诱导周期加序列的出现, 产生新的通向混沌的道路. 然而, 对于擦边诱导激变的全局分析甚少.

非线性、非光滑和随机干扰的共同作用通常使得系统表现出错综复杂的动力学现象, 此时系统全局结构的研究变得尤为重要. 胞映射方法作为一种有效的全局分析的数值方法, 最早由 Hsu^[10] 提出, 后来得到了一系列的改进^[11-12]. 目前, 关于非光滑动力系统全局分析的结果主要针对确定性非光滑系统^[13-16], 在研究随机非光滑系统时主要采用的是简

单胞映射方法^[17]. 然而, 对于随机非光滑系统激变的全局分析, 不稳定解(周期鞍与混沌鞍)、复杂的分形边界和非光滑流形等的研究有重要意义, 此时简单胞映射方法具有一定的局限性.

本文将擦边流形引入到图胞映射方法的分析中, 对非线性单边碰撞系统中的擦边诱导激变进行研究, 揭示系统的全局动力学特性.

1 碰撞振动系统擦边流形

考虑一般的碰撞振动系统, 系统的自由运动方程为

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in S = \{z \in D \subset \mathbf{R}^n : H(z) < 0\} \quad (1)$$

在碰撞面 $\Sigma = \{z \in D : H(z) = 0\}$ 上, 系统的碰撞映射 $I: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为

$$z_+ = I(z_-) \quad (2)$$

这里 z_+ 和 z_- 分别表示碰撞前后时刻系统的状态. 假设 t^* 为碰撞时刻, 则 $z_{\pm} = z(t^* \pm 0)$.

令系统 (1) 的轨线流为 $\Phi(z, t)$, 则轨线流关于碰撞面 Σ 的法向速度和加速度分别为

$$v(z) = \partial H(\Phi(z, t)) / \partial t = H_z F(z) \quad (3)$$

$$a(z) = \partial^2 H(\Phi(z, t)) / \partial t^2 = (H_{zz} + H_z F_z) F(z) \quad (4)$$

2012-11-09 收到第 1 稿, 2012-12-18 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(11172233), 陕西省教育厅专项科研计划(12JK0854)和西安工程大学博士科研基金(BS1003)资助项目.

2) 冯进钤, 副教授, 主要研究方向: 非光滑系统动力学、非线性随机动力学. E-mail: fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn

在子空间 $\Xi_v = \{z : v(z) = 0\}$ 上, 引入局部非碰撞集、局部碰撞集和局部擦边集如下

$$\begin{aligned} G^- &= \{z : H(z) < 0, z \in \Xi_v\} \\ G^+ &= \{z : H(z) > 0, z \in \Xi_v\} \\ G &= \{z : H(z) = 0, z \in \Xi_v, a(z) < 0\} \end{aligned} \quad (5)$$

基于上述局部擦边集的定义, 擦边流形可定义为

$$GM = \{y \in D : \Phi(y, t) = z^*, z^* \in G, \forall t \geq 0, \Phi(y, t) \in D\} \quad (6)$$

随机系统的典型特征表现为同一初始条件下可能有不同的映射结果, 图胞映射方法是解决此问题的一种天然有效的数值方法. 在图胞映射方法中为了研究擦边流形的逼近, 关键问题是寻找擦边胞集. 基于定义 (5), 在图胞映射中擦边胞集 $G^{(1)}$ 是这样的顶点集, 从该集合中每个顶点出发在一步映射过程中既有经过非碰撞集 G^- 的轨线也有经过碰撞集 G^+ 的轨线. 擦边胞集 $G^{(1)}$ 的像胞组成的集合构成擦边胞集 $G^{(\infty)}$. 擦边胞集 $G^{(1)}$ 和 $G^{(\infty)}$ 总称为擦边胞集 G .

基于擦边胞集的讨论, 以二维空间例, 下面给出随机碰撞振动系统擦边流形的数值近似方法.

(1) 首先, 开辟图空间 $D = \langle V, E \rangle$, 将讨论的区域划分为 $N_1 \times N_2$ 个单元格, 每个单元格记为胞 $V_i (i = 1, 2, \dots, N_1 \times N_2)$, 陷胞记为 V_0 , 所有胞集构成有向图的顶点集 V .

(2) 每个正规胞 V_i 内取 m 个采样点, 对于每个采样点直接进行积分, 得到的 Poincare 映射点所属的胞称为胞 V_i 的像胞, 从而胞 V_i 与其像胞之间构成有向图的边集 E .

(3) 根据式 (5), 在一步映射过程中标注胞 V_i 的所有采样点的非光滑属性. 若胞 V_i 中同时包含非碰撞集 G^- 的采样点和碰撞集 G^+ 的采样点, 标注胞 V_i 为擦边胞, 所有的擦边胞构成擦边胞集 $G^{(1)}$. 在有向图中搜索胞集 $G^{(1)}$ 的原像胞, 即得擦边胞集 $G^{(\infty)}$.

(4) 如有必要, 利用迭代图胞映射方法^[3], 对擦边胞集 $G^{(1)}$ 和 $G^{(\infty)}$ 进行细分迭代, 当胞的尺寸足够小时, 擦边胞集可作为擦边流形的数值逼近.

(5) 借助图胞映射方法^[12], 建立图胞映射动力系统, 分析系统的全局动力学.

2 典型 Duffing 单边碰撞振动系统的擦边诱导激变

考虑如下典型的 Duffing 单边碰撞振动系统

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + ax + b\dot{x} + x^3 &= f \cos(\omega t) + \sigma \xi(t), \quad x < \Delta \\ \dot{x}_+ &= -r\dot{x}_-, \quad x = \Delta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, Δ 表示间隙位置, 描述系统发生碰撞的位置. r 为碰撞恢复系数, 通常与碰撞面的材料有关, 满足 $0 < r \leq 1$. $\xi(t)$ 为标准 Gauss 白噪声. 令 $z = (x, \dot{x}, \omega t)^T$, 当状态变量满足 $H(z) = x - \Delta < 0$ 时, 系统的运动为无约束的“自由运动”, 运动方程表示为连续微分方程形式; 一旦满足 $H(z) = 0$, 系统的状态将发生跳跃, 由离散的碰撞映射描述. 因此, 系统 (7) 是由连续微分方程和离散映射组成的混合系统.

2.1 确定性情形: $\sigma = 0$

在系统 (7) 仅受谐和外激励的情形, 即 $\sigma = 0, f \neq 0$, 考虑碰撞恢复系数 r 对系统全局动力学的影响. 固定部分系统参数为 $a = 1, b = 0.02, f = 0.77, \omega = 0.8, \Delta = 1$. 选取 Poincare 截面为

$$\Pi = \{(x, \dot{x}, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times S : \theta = \omega t \bmod (2\pi)\} \quad (8)$$

对于每个参数值 r , 在状态空间 $\bar{U} = \{(x, \dot{x}) : -1.5 \leq x \leq \Delta, -2 \leq \dot{x} \leq 2\}$ 中随机均匀选取 100 个初始点, 去掉 500 个瞬态周期点后, 保留 300 个稳态周期点得到稳态多初值分岔图, 并结合打靶法得到不稳周期解, 如图 1. 其中黑色为稳态解, 灰色为不稳周期解. 从图 1 可以看到, 当 r 在 0.8~0.5 之间变化时, 周期吸引子 A(1) 保持拓扑性质不变. 随着 r 的减小, 混沌吸引子 A(2) 逐渐的缩小. 在 r 减小到 $r_{GB} \approx 0.588$ 时, 一种擦边激变发生, 鞍型周期解 S(1) 与混沌吸引子 A(2) 碰撞后一同消失. 这种激变形式类似于光滑系统的鞍结分岔与混沌激变的组合效应.

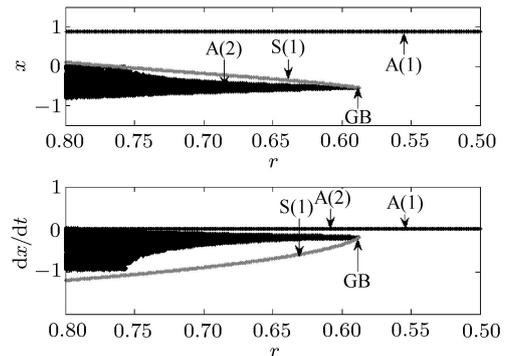


图 1 多初值分岔图

Fig. 1 Global bifurcation diagram with multi-initial points

为了更深入分析该激变发生的机理,下面将利用图胞映射方法分析激变发生前后系统的全局动力学行为.首先,将感兴趣的区域 $U = \{(x, \dot{x}) : -1.5 \leq x \leq 1, -1 \leq \dot{x} \leq 1\}$ 均匀划分为 400×400 个胞,每个胞取 100 个采样点,依据上文建立图胞映射动力系统.

当 $r = 0.589$ 时,系统 (7) 的全局结构由图 2(a) 给出,其中 B(2) 表征混沌吸引子 A(2) 的吸引盆, B(1,2) 表征周期吸引子 A(1) 和混沌吸引子 A(2) 的吸引盆边界.考虑到文中研究的是周期解的擦边,这里采用擦边胞集 $G^{(1)}$ 逼近擦边流形,标注为 GM.利用图胞映射方法的细分技术^[12],考虑子区域 $\bar{U} = \{(x, \dot{x}) : -0.562 \leq x \leq -0.538, -0.25 \leq \dot{x} \leq -0.15\}$,该区域包含了 64 个胞,将每个胞均匀细分为 50×50 个小胞,得到图 2(a) 的局部放大图 2(b).图 2 中的混沌吸引子 A(2) 与擦边流形 GM 横截相交,表明该混沌吸

引子包含擦边结构.此外, A(2) 具有指状的奇异结构,表现出不连续的特性,这种结构与系统的非光滑特征有着紧密的联系,将另文详细讨论.

当 r 减小到 0.588 时,混沌边界激变发生,混沌吸引子 A(2) 与边界的鞍 S(1) 发生碰撞变为混沌鞍 S(2),见图 3.实际上,混沌边界激变的发生与边界上鞍的稳定流形与不稳定流形的相切密切相关.当 $r = 0.589$ 时, S(1) 的稳定流形 $SM_{S(1)}$ 与不稳定流形 $UM_{S(1)}$ 是分离的,见图 4(a).当 r 减小到 0.588 时,图 4(b) 显示, S(1) 的稳定流形的一支与不稳定流形的一支发生了相切,暗示着同宿分岔的发生,这些相切位置为混沌鞍 S(2) 提供了逃逸路径,使得混沌鞍 S(2) 表现出非吸引力.此外, S(1) 的不稳定流形的一支与擦边流形 GM 横截相交,表明不稳定流形具有擦边结构,这种擦边结构的奇异性通常导致不稳定流形表现出不连续性的特点.可见,边界上鞍的稳定

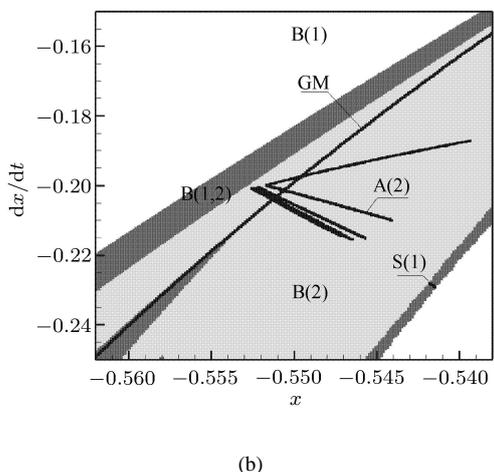
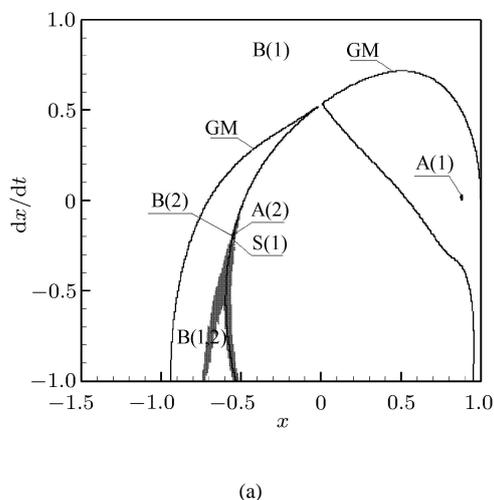


图 2 $r = 0.589$ 时系统 (7) 的全局结构. (b) 是 (a) 的局部放大图
Fig. 2 Global structure of system (7) with $r = 0.589$. (b) is the local enlarger of (a)

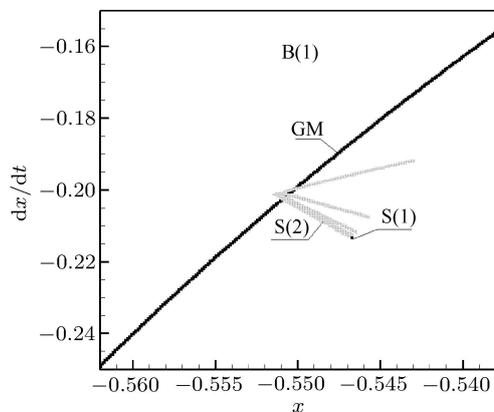


图 3 $r = 0.588$ 时系统 (7) 的全局结构

Fig. 3 Global structure of system (7) with $r = 0.588$

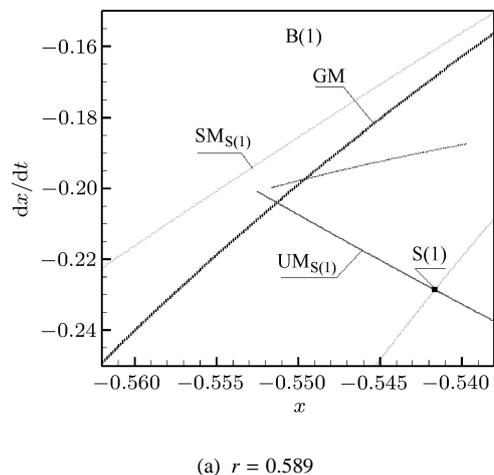
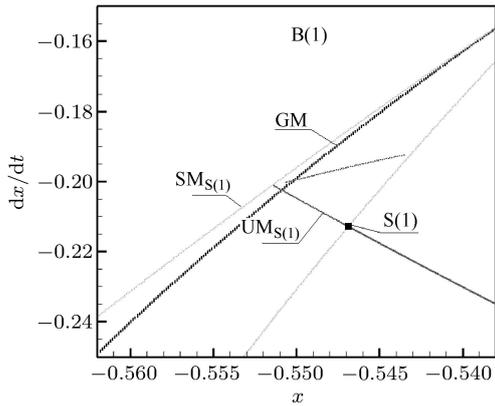


图 4 S(1) 的稳定流形 $SM_{S(1)}$ 与不稳定流形 $UM_{S(1)}$
Fig. 4 The stable and unstable manifolds of S(1)



(b) $r = 0.588$

图 4 S(1) 的稳定流形 $SM_{S(1)}$ 与不稳定流形 $UM_{S(1)}$ (续)

Fig. 4 The stable and unstable manifolds of S(1)(continued)

流形与不稳定流形的相切可以导致混沌吸引子的非吸引性, 从而诱导混沌边界激变的发生.

继续减小 r 到 0.587 时, 图 3 中的周期鞍 S(1) 和混沌鞍 S(2) 同时消失, 只剩下吸引子 A(1), 图 5 给出了系统 (7) 在区域 U 上的全局结构. 比较图 3 和图 5 可以看到, 当 r 跨过临界值 $r_c \in [0.587, 0.588]$ 时, 一种新颖的擦边分岔发生, 这种分岔形式表现为不稳定解的激变.

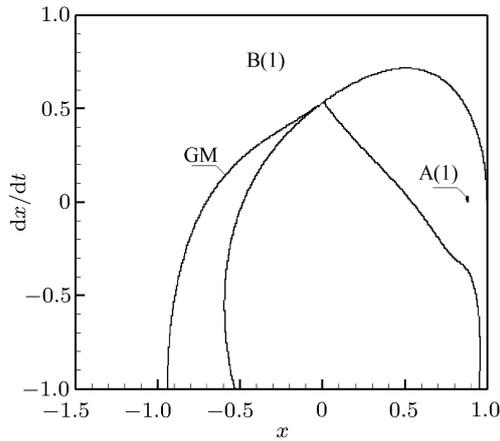


图 5 $r = 0.587$ 时系统 (7) 的全局结构

Fig. 5 Global structure of system (7) with $r = 0.587$

当 r 从 0.588 减小到 0.5873 时, S(1) 与擦边流形 GM 碰撞后消失, 对应的全局结构图类似于图 5, 故略去. 当 $r = r_c \approx 0.5873$ 时, 由打靶法得到 S(1) 的初始条件为 $(x_0, y_0) = (-0.550, -0.203)$, 考虑 S(1) 的 2 条扰动轨道 DS1 和 DS2, 分别位于擦边流形 GM 的两侧, 其初始条件分别为 $(x_0 + 0.05, y_0)$ 和 $(x_0 - 0.05, y_0)$. 图 6 给出了这 3 条轨道在一个周期 $T(T = 2\pi/\omega)$ 内

的时间历程图, S(1) 经历了 1 次擦边和 1 次碰撞, DS1 只发生了 1 次碰撞, DS2 发生了两次碰撞, 可见 3 条轨道的拓扑性质是不同的. 由动力系统稳定性理论知, 擦边周期鞍 S(1) 对于不同的扰动 DS1 和 DS2, 对应的稳定性也不同. 在 1 次 Poincare 映射下, 对于扰动 DS1, S(1) 的基解矩阵的 2 个特征值分别为 (1.122, 0) 和 (0.26, 0). 相应的, 对于扰动 DS2, S(1) 的基解矩阵的 2 个特征值分别为 (-9.19, 0) 和 (-0.01, 0). 可见, 擦边可以诱导周期轨出现多重稳定性.

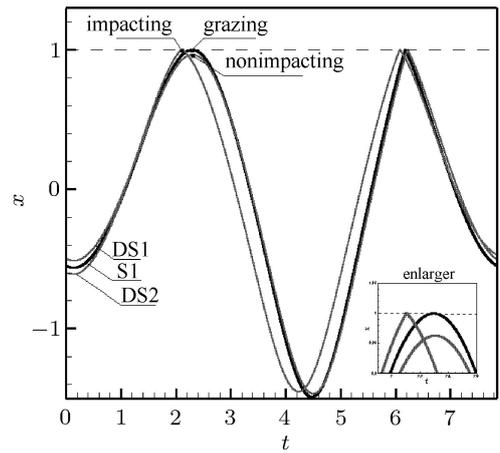


图 6 $r = 0.5873$ 时周期鞍 S(1) 及其两条扰动轨 DS1 和 DS2 的时间历程图. 右下角是局部放大图

Fig. 6 Time history portraits of period saddle S(1) and two perturbed orbits DS1 and DS2 ($r = 0.5873$). The part in the lower right is a local enlarger

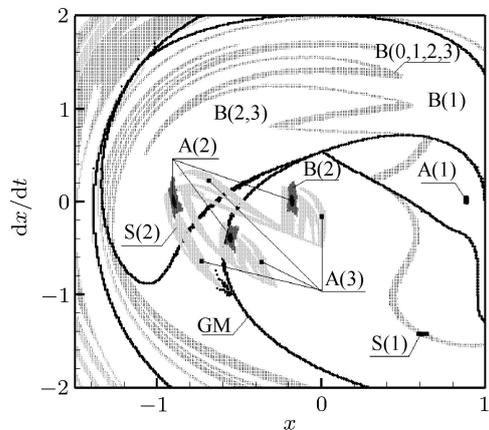
2.2 随机情形: $\sigma \neq 0$

固定恢复系数为 $r = 0.95$, 考虑噪声诱导的随机分岔与激变. 下面的全局分析中, 将感兴趣的区域取为 $U = \{(x, \dot{x}) : -1.5 \leq x \leq 1, -2 \leq \dot{x} \leq 2\}$, 网格划分为 300×400 , 每个胞取 64 个采样点, 每个采样点随机模拟 10 次.

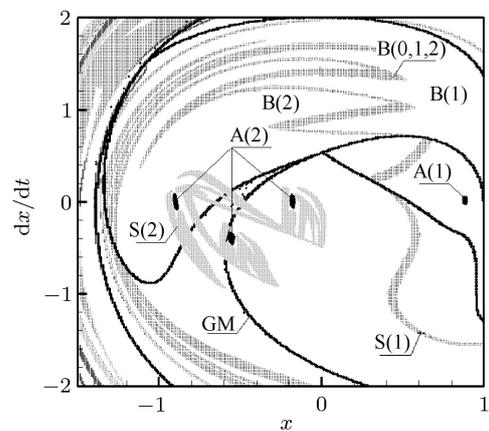
当噪声幅值 $\sigma = 0$ 时, 在讨论区域 U 内图 7(a) 显示了 3 个共存的吸引子, 分别为周期 1 吸引子 A(1), 周期 3 吸引子 A(2) 和周期 4 吸引子 A(3). 将陷胞看作一个吸引子 A(0), S(1) 表示 Wada 盆边界 B(0,1,2,3) 上的鞍, 在 A(2) 和 A(3) 的盆边界 B(2,3) 上环绕着 1 个混沌鞍 S(2), 它与擦边流形 GM 横截相交, 暗示了 S(2) 包含擦边结构. 此外, 图 7(a) 中的 Wada 盆边界具有不连续的“尖点”, 部分尖点刚好处于擦边流形 GM 上, 表明擦边结构破坏了盆边界的光滑性.

当噪声幅值 σ 增大到 0.0001 时, 吸引子 A(3) 与混沌鞍 S(2) 碰撞, 边界激变发生导致吸引子 A(3) 及

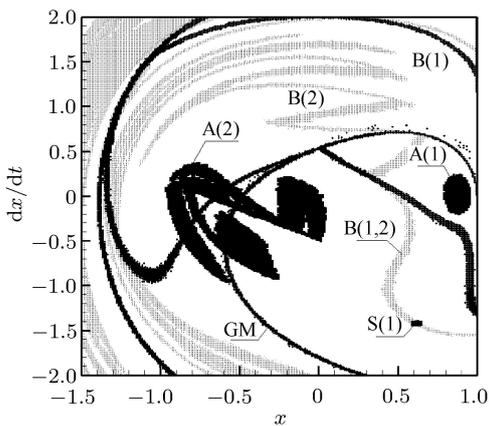
其吸引盆一同消失, 边界上的混沌鞍 S(2) 转化为吸引盆 B(2) 内的内部混沌鞍, 见图 7(b). 图 7(a) 中吸引子 A(3) 的位置与擦边流形 GM 远离, 表明该边界激变并不是由擦边所诱导的.



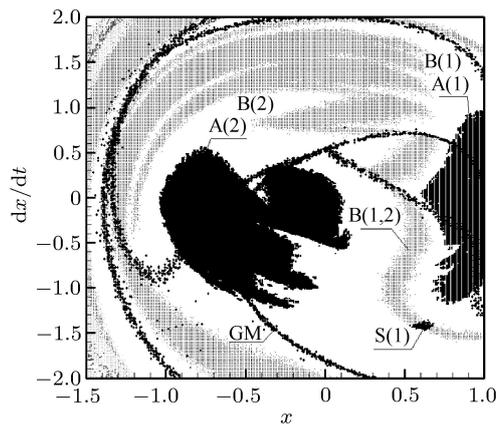
(a) $\sigma = 0$



(b) $\sigma = 0.0001$



(c) $\sigma = 0.005$



(d) $\sigma = 0.01$

图 7 不同噪声强度下系统 (7) 的全局结构

Fig. 7 Global structures of system (7) with different noise intensity

当 $\sigma = 0.005$ 时, 周期吸引子 A(2) 与其吸引盆内的混沌鞍 S(2) 碰撞导致内部激变的发生, 混沌鞍 S(2) 转化为稳定吸引子 A(2) 新增的一部分, 见图 7(c). 利用文献 [18] 中平均最大 Lyapunov 指数 (MLE) 的计算知道, 吸引子 A(2) 对应的 MLE 约为 0.0098, 表明 A(2) 为混沌吸引子. 从图 7(b) 和 (c) 可以看到, 吸引子 A(2) 与擦边流形 GM 发生了碰撞, 则周期吸引子 A(2) 必然包含擦边轨道. 另一方面, 混沌鞍 S(2) 与擦边流形 GM 横截相交, 表明混沌鞍 S(2) 中也包含擦边轨道, 考虑到混沌鞍 S(2) 处于周期吸引子 A(2) 的吸引盆中, 则 S(2) 和 A(2) 将发生碰撞, 从而形成新的混沌吸引子. 可见, 噪声可以诱导周期轨发生擦边, 这种擦边导致了内部激变的发生.

当 σ 继续增大到 0.01, 见图 7(d), 噪声的增强引起了吸引子 A(1) 和 A(2), 以及边界鞍 S(1) 的扩散, 但其拓扑性质没有改变. 随着 σ 的进一步增大, 吸引子 A(1) 和 A(2) 将与边界上的鞍 S(1) 发生碰撞, 形成一个更大的混沌吸引子, 这里不再赘述.

3 结论

基于图胞映射方法, 提出了碰撞振动系统擦边流形的数值逼近方法. 在此基础上研究了典型 Duffing 单边碰撞振动系统中的激变动力学, 得到如下结论:

- (1) 碰撞混沌吸引子和碰撞混沌鞍具有遍历性, 它们必然包含擦边结构, 这与本文的数值结果是一致的, 验证了擦边流形的数值逼近方法的有效性.
- (2) 通过擦边流形的研究发现, 在确定性情形下, 随着系统参数的变化, 系统经历了 2 种激变形

式. 第 1 种为擦边诱导的不稳定解的激变. 周期轨经历擦边时可以导致稳定性发生改变, 诱导出一种新颖的擦边激变的发生, 这种擦边激变同时产生了 1 个周期鞍和 1 个奇异的混沌鞍, 且该混沌鞍具有擦边结构, 表现出非光滑的特性. 第 2 种为混沌边界激变. 当混沌吸引子与边界上周期鞍发生碰撞时, 边界鞍的稳定流形与不稳定流形发生相切, 导致混沌吸引子演变成混沌鞍.

(3) 随着噪声强度的变化, 系统发生了另外 2 种激变. 一种为边界激变. 这种边界激变是由于周期吸引子与边界上的混沌鞍碰撞产生的, 导致该吸引子及其吸引盆一同消失, 留下一个新的混沌鞍. 另一种为擦边诱导的混沌激变. 周期吸引子发生擦边, 导致该吸引子与其吸引盆内部的混沌鞍发生碰撞, 形成 1 个混沌吸引子.

文中提出的擦边流形的逼近方法对于一般的非线性碰撞振动系统都是适用的, 为进一步研究非线性碰撞振动系统中的擦边诱导分岔和混沌提供帮助.

参 考 文 献

- 1 罗冠伟, 谢建华. 碰撞振动系统的周期运动和分岔. 北京: 科学出版社, 2004 (Luo Guanwei, Xie Jianhua. Period Motion and Bifurcations of Vibro-impact Systems. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))
- 2 丁旺财, 谢建华. 碰撞振动系统分岔和混沌的研究进展. 力学进展, 2005, 35(4): 513-524 (Ding Wangcai, Xie Jianhua. Advances of research on bifurcations and chaos in vibro-impact system. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(4): 513-524 (in Chinese))
- 3 金栋平, 胡海岩. 碰撞振动与控制. 北京: 科学出版社, 2005 (Jin Dongping, Hu Haiyan. Vibration and Control of Collision. Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese))
- 4 Kunze M. Non-Smooth Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2000
- 5 金俐, 陆启韶. 非光滑动力系统 Lyapunov 指数谱的计算方法. 力学学报, 2005, 37(1): 40-47 (Jin Li, Lu Qishao. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents of non-smooth dynamical systems. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1): 40-47 (in Chinese))
- 6 Leine RI, Nijmeijer H. Dynamics and Bifurcations in Non-Smooth Mechanical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 7 di Bernardo M, Budd C, Champneys AR, et al. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2007
- 8 秦志英. 非光滑动力系统的非光滑分岔研究.[博士论文]. 北京: 北京航空航天大学, 2007 (Qin Zhiying. Research on nonsmooth bifurcations in nonsmooth dynamical systems. [PhD Thesis]. Beijing: Beihang University, 2007 (in Chinese))
- 9 Piiroinen PT, Virgin LN, Champneys AR. Chaos and period-adding, experimental and numerical verification of the grazing bifurcation. *Journal of Nonlinear Science*, 2004, 14(4): 627-654
- 10 Hsu CS. Global analysis of dynamical systems using posets and digraphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(4): 1085-1118
- 11 Hong L, Xu JX. Crises and Chaotic transients studied by the generalized cell mapping digraph method. *Phys Lett A*, 1999, 262(4-5): 361-375
- 12 贺群, 徐伟, 李爽等. 基于复合胞花空间的图胞映射方法. 物理学报, 2008, 57(7): 4021-4028 (He Qun, Xu Wei, Li Shuang, et al. The digraph cell mapping based on composite cell space. *Acta Phys Sin*, 2008, 57(7): 4021-4028 (in Chinese))
- 13 van der Spek JAW, de Hoon CAL, de Kraker A, et al. Application of cell mapping methods to a discontinuous dynamic system. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 6(1): 87-99
- 14 李健, 张思进. 非光滑动力系统胞映射计算方法. 固体力学学报, 2007, 28(1): 93-96 (Li Jian, Zhang Sijin. Cell-mapping computation method for non-smooth dynamical systems. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2007, 28(1): 93-96 (in Chinese))
- 15 Mason JF, Piiroinen PT. Interactions between global and grazing bifurcation in an impacting system. *Chaos*, 2011, 21(013113): 1-9
- 16 李爽, 贺群. 非光滑动力系统的迭代图胞映射法. 力学学报, 2011, 43(3): 579-585 (Li Shuang, He Qun. The iterative digraph cell mapping method of non-smooth dynamical systems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(3): 579-585 (in Chinese))
- 17 Gun CB, Lei H. Stochastic dynamical analysis of a kind of Vibro-impact system under multiple harmonic and random excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330: 2174-2184
- 18 Feng JQ, Xu W. Analysis of bifurcations for non-linear stochastic non-smooth vibro-impact system via top Lyapunov exponent. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 213: 577-586

(责任编辑: 周冬冬)

GRAZING-INDUCED CHAOSTIC CRISIS FOR PERIODIC ORBITS IN VIBRO-IMPACT SYSTEMS¹⁾

Feng Jinqian^{*,2)} Xu Wei[†]

**(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)*

†(College of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract A numerical approximation of grazing manifold is proposed via the digraph cell mapping method. The global dynamics of grazing-induced crisis for a typical Duffing vibro-impact system are then investigated. The results reveal that, the singularity caused by the grazing nature of periodic orbits can induce a bifurcation where a periodic saddle and a chaotic saddle arise simultaneously. When the stable and unstable manifolds of the periodic saddle undergo the tangency, a boundary crisis occurs and a chaotic attractor is then brought from the chaotic saddle. Also, grazing phenomenon of periodic orbits induced by noise can be observed. This grazing phenomenon can induce a novel interior crisis, where a chaotic attractor arises due to the collision of this periodic attractor and the chaotic saddle.

Key words vibro-impact system, grazing manifold, grazing-induced crisis, digraph cell mapping

Received 9 November 2012, revised 18 December 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172233), the Scientific Research Program of the Education Bureau of Shanxi Province, China (12JK0854) and the Doctoral Program of Xi'an Polytechnic University, China (BS1003).

2) Feng Jinqian, associate professor, research interests: nonsmooth system dynamics and nonlinear stochastic dynamics.

E-mail: fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn