

考虑位移补偿的结构几何稳定性拓扑优化¹⁾苏文政^{*,2)} 张永存[†] 刘书田[†]^{*}(大连交通大学土木与安全工程学院, 大连 116028)[†](大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 工程力学系, 大连 116023)

摘要 大量工程问题要求结构的局部区域在不同承载工况下保持位移响应的几何稳定性. 在结构的特定区域引入可以随承载工况调节的补偿位移是实现这一目标的有效手段. 在线弹性小变形范围内, 通过最小的变形控制成本, 研究了多工况下使结构特定位置的位移响应保持几何稳定性的拓扑优化问题. 设计目标为在保持结构位移响应几何稳定性的同时实现结构的最大刚度; 优化模型包含两类设计变量: 结构拓扑变量及补偿位移变量, 两类变量采用分层寻优技术进行耦合. 采用伴随法分别推导了目标函数对两类设计变量的敏度求解格式. 结果表明, 该优化模型能够在兼顾成本的同时较好地实现结构的变形控制目标.

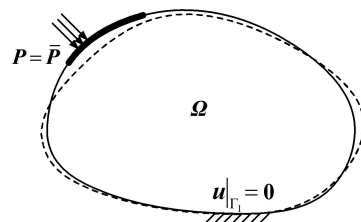
关键词 结构优化, 拓扑优化, 位移补偿, 变形控制, 敏度分析

中图分类号: O342 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-295

引 言

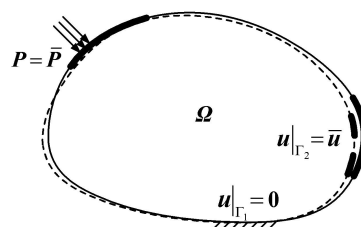
工程领域大量问题对结构或构件在不同载荷工况下特定位置的几何稳定性有严格要求. 例如, 桥梁要求在不同的承载工况下桥面的挠度均保持在许可范围内; 建筑屋架在不同季节, 因环境温度改变会产生不同的热应力, 同时因雨雪天气变化而具有鲜明的多工况特点, 其变形则应始终保持在许可范围内; 雷达天线在不同的转向角及不同自然载荷下均要求其反射板保持设计形状以确保稳定工作; 飞船、空间站等太空结构因空间位置的改变而承受不同的热载荷作用, 其整体变形则需要保持一致性. 上述问题均可表述为要求结构的特定位置在不同工况下保持稳定的位移响应, 这一要求对结构设计提出了挑战.

位移补偿技术是实现上述结构几何稳定性控制的有效方法. 位移补偿的原理为: 将结构的部分区域设定为位移补偿区域, 在不同的工况下, 通过调整补偿位移, 改善结构的内力分布, 从而在一定程度上对结构的位移输出区域在外载荷作用下的变形起到有效的补偿调节作用 (图 1), 并最终获得几何稳定的结构. 实际结构中的位移补偿实现形式各不相同: 桥梁可通过对支座的拉紧作用形成补偿机制; 屋架则通



(a) 无补偿位移

(a) Without compensation displacements



(b) 含补偿位移

(b) With compensation displacements

图 1 位移补偿结构示意图: 实线表初始构形, 虚线表变形后构形

Fig. 1 Sketch of the displacement controlling structures: the solid line denotes the initial configuration while the dotted line denotes the deformed configuration

2012-10-26 收到第 1 稿, 2012-12-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11002031, 11202246, 11172052), 辽宁省博士科研启动基金 (20101008) 和辽宁省高校优秀人才支持计划 (LJQ2012040) 资助项目.

2) 苏文政, 副教授, 主要研究方向: 结构优化及材料和结构的一体化设计. E-mail: wzhsu@djtu.edu.cn

过可调节的起拱技术形成补偿;而雷达天线则通过选择一组杆件并施加预拉力产生部分节点位置的改变实现补偿^[1-2]. 位移补偿的共同特点为:补偿位移在结构内产生的内力与对结构几何稳定性保持不利的外载荷产生的内力符号相反,以此可以部分地抵消结构变形,形成有效的补偿效果.

不仅如此,位移补偿技术与传统的拓扑优化方法相结合也成为设计不同工况下几何稳定结构的有效手段. 对于单工况问题,利用传统的结构拓扑优化方法,通过设计材料的合理分布,实现结构在某一区域的理想位移响应是较为成熟的技术. 但是对于多工况问题,仅利用拓扑优化技术设计材料的分布难以在不同工况下保持几何稳定的目标位移. 由于不同工况下,补偿位移可以在一定范围内进行调节,因此位移补偿技术对于多工况下结构的变形控制问题更为重要.

对于实际工程,实现位移补偿所需要的控制成本不容忽视. 结构的补偿位移本质上仍然是结构的一种变形模式,实现这一变形,必须付出额外的控制成本. 控制成本的高低直接决定了位移补偿方案是否可行. 因此位移补偿结构的设计需要准确地描述控制成本,并寻求有效降低补偿成本的方案.

较之普通结构,位移补偿结构的拓扑优化在 3 个方面更为困难. 一是位移补偿结构同时承受力和位移载荷双重作用,而二者对于结构变形的影响往往是相反的. 对于这类问题,目标函数需要重新考虑,即使对于控制结构变形的结构刚度设计问题,也不能再简单地使用柔顺性为目标^[3-5]. 二是优化模型中同时存在拓扑以及补偿位移两类不同类型的设计变量,两类设计变量之间的合理耦合方式需要探讨. 三是如何恰当地引入实现补偿所需要的控制成本,即如何将控制成本限制在一个合理的水平.

同时含有给定位移和给定外力的结构拓扑优化与单独含有其中一类条件的优化问题在处理方法上不同. 通常,给定位移会以位移载荷的方式引入. 结构单独作用力或者位移,目标函数的选择均较为简单,可以选择最小柔顺性(给定载荷)或者最大应变能(给定位移)以获得最大刚度,也可选择最大输出位移以获得柔性机构. 而已有的工作表明,同时作用两类载荷,柔顺性目标不可能获得最大刚度设计. 因此目标函数的选择是一个关键问题^[6],尤其是多工况下,如何评价结构的优劣.

对于拓扑变量与位移变量的耦合问题,本文采

用分层优化的方法首先设计结构的拓扑,在此基础上寻求与结构相匹配的补偿位移.

对于位移补偿的控制成本表征问题,本文采用补偿区域的驱动力做功来描述. 补偿位移本质上是结构的初始变形,因此实现补偿位移所需的驱动力以及驱动力做的功能够直接反映位移补偿的控制成本.

需要说明的是,专门的形状控制研究也是近年来的研究热点,但是与本文不同的是,这类工作往往偏重于形状控制本身. 其设计变量通常为数量较多的控制源(如作动器电压、主控杆件的节点位移等),较少考虑结构在不同工况下的承载性能,也较少与结构自身拓扑设计相结合.

本文在线弹性小变形范围内,研究含有不同工况下结构几何稳定性要求的拓扑优化问题. 协同考虑材料的最优布局以及与之匹配的最低成本的补偿位移对结构特定区域变形稳定性的控制作用,利用分层优化方法研究结构拓扑变量及补偿位移变量的匹配方案.

1 优化列式

1.1 优化模型

优化模型概述为:对于给定用量的材料,通过设计材料分布及补偿位移大小,在满足结构特定输出位移具有不同工况下的几何稳定性要求下,获得具有最大承载能力(刚度)的结构.

优化模型包含两类设计变量:单元的密度变量(拓扑变量)以及补偿位移的值.

单元密度变量通过传统的 SIMP 插值模型引入结构

$$\mathbf{C} = \rho_e^p \mathbf{C}_0, \quad e = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中, ρ_e 表示单元密度, p 为惩罚指数,且通常 $p \geq 3$, $\mathbf{C}_0$ 表示基体材料的本构刚度矩阵, n 表示拓扑设计变量数目.

为处理方便,补偿位移采用易于结构优化处理的标准形式

$$\bar{u}_i = \delta_i a_i, \quad i = 1, 2, \dots, t \quad (2)$$

式中, δ_i 表示用于优化计算的补偿位移标准化设计变量, $-1 \leq \delta_i \leq 1$; a_i 为补偿位移的幅值,表示补偿位移的最大允许值,取决于补偿位移的施加方法及能力,为已知量; t 表示可调节的补偿位移数量.

优化问题的提法为

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{find: } (\rho, \delta) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t) \\
 &\text{min: } \sum_{j=1}^s W_{0j} \\
 &\text{s.t.: } g_1 = \sum_{e=1}^n \int_{V_e} \rho_e dV \leq V^* \\
 &\quad g_2 = \bar{W} \leq W^* \\
 &\quad g_3 = (u_{ij} - \tilde{u}_i)^2 \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 &\quad \quad j = 1, 2, \dots, s \\
 &\quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, 2, \dots, n \\
 &\quad -1 \leq \delta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, t
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, ρ_i 表示单元密度变量, δ_i 表示标准化的可调位移变量, s 表示工况数, W_{0j} 表示 j 工况下当补偿位移为 0 时外载荷所作的功, 表征结构刚度性能. 约束函数 g_1 为许用材料的体积约束, 表征材料成本; 约束函数 g_2 为实现最大补偿位移所需的驱动力功, 表征实现位移补偿的控制成本, g_2 的具体实现及详细描述将在第 1.2 节进行阐述; 约束函数 g_3 为一组位移约束函数, 表示 r 个输出位移在 s 个工况下均应保持稳定理想响应, 表征结构的几何稳定性要求, 其中 ε 为小量.

由于原始的优化模型中的几何稳定性约束不便于计算, 故利用对偶规划原理将优化模型进行改写, 使其作为目标函数的一部分. 优化列式改写为

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{find: } (\rho, \delta) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t) \\
 &\text{min: } f = \frac{1}{rs} \sum_{j=1}^s \left[\sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i}{u_*^2} (u_{ij} - \tilde{u}_i)^2 + \frac{\beta_j}{W_*} W_{0j} \right] \\
 &\text{s.t.: } g_1 = \sum_{e=1}^n \int_{V_e} \rho_e dV \leq V^* \\
 &\quad g_2 = \bar{W} \leq W^* \\
 &\quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, 2, \dots, n \\
 &\quad -1 \leq \delta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, t
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

新的目标函数在形式上为多目标格式, α 和 β 为权重系数, 其中 α_i 用以表征对不同采样点的输出位移要求, 为保证结构输出位移的几何稳定性, 通常 $\beta < \alpha$. 因目标函数的两项量纲不同, 为避免数值不稳定, 采用归一化处理. 归一化位移 u_* 及功 W_* 分别表示当结构为实体结构且补偿位移为 0 时, 不同工况下结构的平均输出位移及平均外力功.

对于优化模型的实现策略, 本文采用两层优化方法. 内层优化暂时保持补偿位移不变, 对密度变量进行优化; 而外层优化则调整对应内层最优布局的补偿位移值. 图 2 给出了优化求解流程.

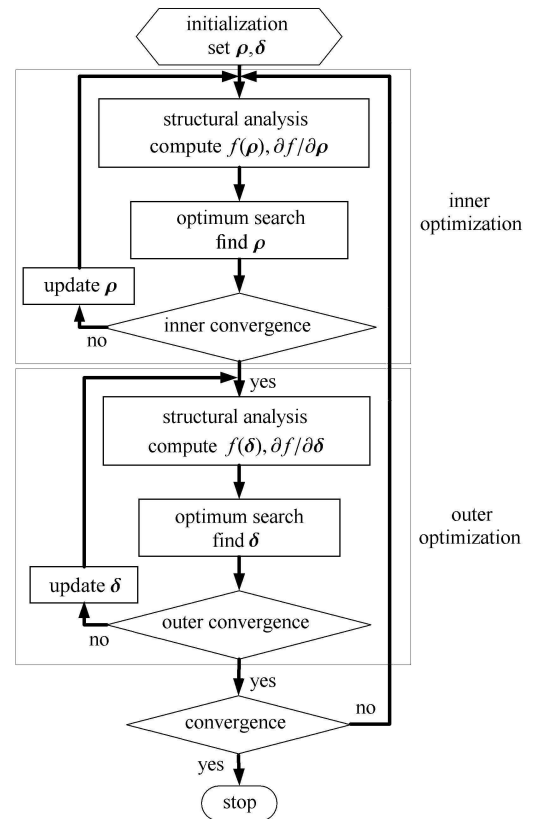


图 2 优化求解流程图

Fig. 2 Flow chart of the optimization solver

内层优化由于变量较多, 计算较为复杂, 可采用 MMA 算法^[7] 寻优; 而外层优化由于补偿位移变量数量较少, 则可采用可行方向法等较简单方法.

1.2 变形控制的成本约束

为描述结构变形补偿的控制成本, 引入一初始变形工况 (图 3). 该工况的特点为: 在结构的位移补偿区域施加最大的补偿位移, 放松结构其他区域. 此

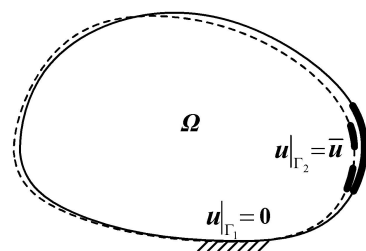


图 3 初始变形工况示意图

Fig. 3 Sketch of the initial deformation loading case

时, 实现这一变形所需的驱动力或者驱动力做功便表征了位移补偿的控制成本.

驱动力做功 (2 倍) 可通过结构的应变能间接获得

$$\bar{W} = \bar{U}^T \mathbf{K} \bar{U} \quad (5)$$

其中 $\bar{U}$ 表示初始工况的节点位移向量.

为从成本上保证位移补偿的合理性, 驱动力在数值上必须低于结构的工作工况下所承受的外力, 或者驱动力做功应低于某数值 W^* . 其中 W^* 可取为虚拟主动力做功的分数.

虚拟主动力做功定义为

$$\tilde{W} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left[(|\mathbf{P}_i| \cdot \mathbf{1}) \cdot \left(\sum_{j=1}^t a_j \right) \right] \quad (6)$$

$$W^* = \mu \tilde{W} \quad (\mu < 1) \quad (7)$$

上式及约束函数 g_2 表示驱动力绝对值之和必须低于外主动力绝对值之和, 否则控制成本将高于结构的使用价值, 失去补偿的意义. μ 越大, 投入的控制成本越高.

2 敏度分析

高效率的优化算法通常需要获取目标函数及约束函数对设计变量的敏度信息. 本问题由于含有两类设计变量, 因此目标函数的敏度需分别求解.

为方便推导, 将目标函数改写为矩阵形式

$$\min : f = \frac{1}{rs} \sum_{j=1}^s \left[(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) + \frac{\beta}{W_*} \mathbf{P}^T \mathbf{U}_0 \right] \quad (8)$$

其中, $\tilde{\mathbf{U}}$ 表示理想的输出位移向量, $\mathbf{P}$ 表示结构所受主动外载荷, $\mathbf{U}_0$ 表示当补偿位移为 0 时的结构位移响应, $\mathbf{Q}$ 为由结构输出区域采样点位移的权重因子所构成的对角阵.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{u_*^2} \text{diag}[0, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, 0] \quad (9)$$

2.1 目标函数对单元密度的敏度

目标函数的第 2 项对单元密度变量的敏度较简单, 故只需推导第 1 项.

由于本文讨论内容限于线弹性小变形问题, 利用叠加原理, 位移和载荷均可分解为 2 个部分.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中第 1 部分满足非齐次边界条件 (即补偿位移); 第 2 部分满足齐次位移边界条件.

$$\mathbf{U}_1^i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{U}_1^o = \tilde{\mathbf{U}} \quad (12)$$

上标 “o” 表示补偿位移, 上标 “i” 表示结构剩余节点位移.

$$\mathbf{U}_2^o = \mathbf{0} \quad (13)$$

则目标函数第 1 项的敏度为

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \right]_i = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \rho_e} \right]_i \quad (14)$$

采用伴随法求解敏度, 引入伴随向量, 并构造广义目标函数

$$\tilde{f}_1 = f_1 - \sum_{i=1}^s [\lambda^T (\mathbf{K} \mathbf{U}_2 - \mathbf{F}_2)]_i \quad (15)$$

则

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \rho_e} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U}_2 + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \rho_e} \right) \right]_i \quad (16)$$

考虑到式 (11)

$$\lambda^T \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \rho_e} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \rho_e} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U}_1 \quad (17)$$

代入式 (16), 得到

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^s \left\{ [2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} - \lambda^T \mathbf{K}] \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \rho_e} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} \right\}_i \quad (18)$$

故求解 s 个伴随方程 (19), 即可获得相应的伴随向量

$$\mathbf{K} \lambda_i = 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}}), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (19)$$

从而目标函数对拓扑变量的敏度为

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_e} = - \sum_{i=1}^s \left[\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \frac{\beta}{W_*} \mathbf{U}_0^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U}_0 \right]_i \quad (20)$$

根据式 (1), 上式较易获得.

2.2 目标函数对补偿位移的敏度

目标函数第 2 项与补偿位移变量无关, 故目标

函数敏感度为

$$\frac{\partial f}{\partial \delta_e} = \frac{\partial f_1}{\partial \delta_e} = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \delta_e} \right]_i = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \right]_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \delta_e} + \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \delta_e} \right)_i \quad (21)$$

由于

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \delta_e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{a} = [0, \dots, a_e, \dots, 0]^T$$

整理, 得

$$\frac{\partial f}{\partial \delta_e} = \sum_{i=1}^s \left[2(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T \mathbf{Q} \right]_i \left(\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \delta_e} \right)_i \quad (23)$$

与对拓扑变量敏感度做相似推导, 引入与式 (15) 相同的伴随向量, 可获得目标函数对补偿位移的敏感度为

$$\frac{\partial f}{\partial \delta_e} = - \sum_{i=1}^s \left[\lambda^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \right]_i \quad (24)$$

2.3 约束函数的敏感度

约束函数对密度变量的敏感度较易获得

$$\frac{\partial g_1}{\partial \rho_e} = \int_{V_e} dV = V_e \quad (25)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \rho_e} = \bar{\mathbf{U}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \bar{\mathbf{U}} \quad (26)$$

2.4 敏感度验证

本节采用有限差分法验证敏感度计算格式. 设计域为尺寸 20×10 的悬臂梁结构, 设计目标为结构在 2 个工况下保持 A, B 两点竖向位移为 0 (图 4). 其中, 工况 1 为结构在 C 点受力 $F_1 = 1$ 作用, 工况 2 为结构在 A 点受力 $F_2 = 1$ 作用. 结构 B 点作用一水平方向的补偿位移. 基体材料弹性模量 $E = 69$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 材料体积约束为 0.3. 结构划分为 20×10 的网格. 不失一般性, 目标函数各系数 α_i, β_i 均取为 1. 此外, 为突出问题本质, 本文所有算例的尺寸、材料及载荷参数均为无量纲化数值.

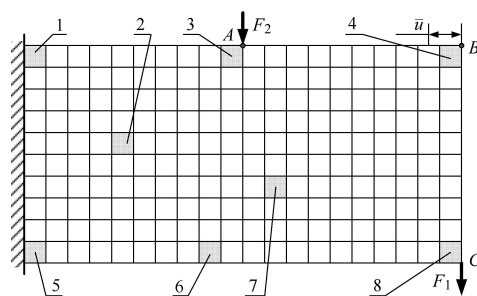


图 4 网格及参考变量

Fig. 4 Mesh and concerning variables

表 1 目标函数对单元密度的敏感度计算的解析法与差分法对比

Table 1 Comparison for the sensitivity to density variables of analysis method with that of finite difference method

Variable No.	FDM	Analysis	Error/%
1	-0.665 022	-0.665 150	0.019 25
2	-0.148 638	-0.148 731	0.062 57
3	-0.517 769	-0.517 968	0.038 43
4	-0.210 889	-0.210 980	0.043 15
5	-1.490 090	-1.491 180	0.073 15
6	-1.210 730	-1.211 840	0.091 68
7	-0.978 600	-0.979 272	0.068 67
8	-0.450 309	-0.450 723	0.091 94

有限差分法的步长选择对计算结果影响较大, 试算表明, 当步长取 0.000 1 时, 计算结果较准确. 表 1 给出了当单元密度为 0.5 时目标函数对图示单元 (拓扑变量) 的敏感度计算结果对比.

表 2 给出了当补偿位移为不同值时, 目标函数对补偿位移变量的敏感度计算结果对比.

表 2 目标函数对补偿位移的敏感度计算的解析法与差分法对比

Table 2 Comparison for the sensitivity to displacement variables of analytical method with that of finite difference method

δ	FDM	Analysis	Error/%
0	-3.068 669	-3.068 670	0.000 03
-0.5	-0.173 140	-0.174 587	0.835 74
-1	2.722 390	2.719 496	0.106 3

结果表明, 本文所采用的目标函数对两类设计变量的敏感度计算结果均准确.

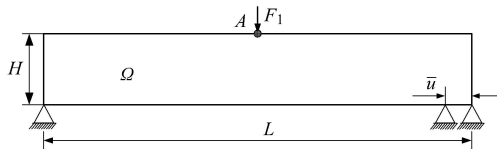
约束函数对设计变量的敏感度较简单, 验证可查阅作者早期工作 [6].

3 数值算例

本节通过 2 个算例验证优化模型的有效性.

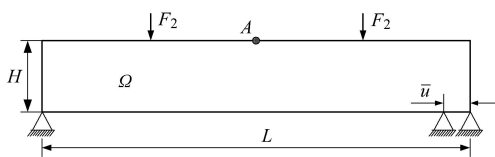
3.1 算例 1

在最小的补偿位移成本下, 设计如图 5(a) 和图 5(b) 所示梁结构拓扑, 使结构在 2 个不同工况下, 上表面中点保持变形的稳定性. 具体参数如下: $L = 180$, $H = 30$, 结构的基体材料弹性模量 $E = 69$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 结构承受 2 个工况载荷: 工况 1 在上表面中点受集中载荷 $F_1 = 1$ (图 5(a)); 工况 2 在结构上表面左右 1/4 位置处受集中力 $F_2 = 0.5$ (图 5(b)). 设计要求为结构在上述 2 个工况下保持上表面中点 A 的竖向位移为 0.1. 结构的右下支座为位移补偿区域, 并施加一大小可调的补偿位移, 其幅值为 2. 给定材料用量为 0.3.



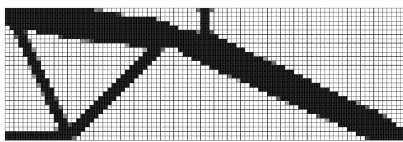
(a) 工况 1

(a) Loading-case 1



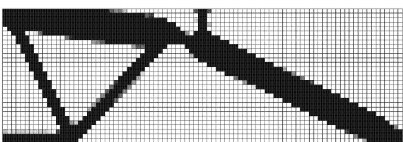
(b) 工况 2

(b) Loading-case 2



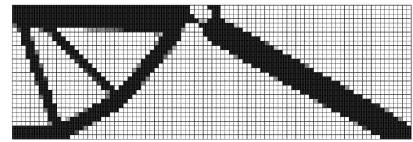
(c) 拓扑结果, $\mu = 0.1$

(c) Topology result, $\mu = 0.1$



(d) 拓扑结果, $\mu = 0.05$

(d) Topology result, $\mu = 0.05$



(e) 拓扑结果, $\mu = 0.005$

(e) Topology result, $\mu = 0.005$

图 5 控制 1 点位移响应结构模型及设计结果

Fig. 5 Design model and result for a structure with one point output displacement

考虑到对称性, 取结构的 1/2 为研究对象, 并划分网格 90×30 . 权重系数 $\beta = 0.01$. 结构在不同控制成本下的拓扑如图 5(c)~图 5(e) 所示, 结构在 2 个工况下的相应补偿位移列入表 3.

表 3 算例 1 结构 2 个工况下的补偿位移

Table 3 Compensation displacements of the structure in example 1 under two loading-cases

	μ	Loading-case 1	Loading-case 2
δ	0.1	-0.529	-0.231
	0.05	-0.583	-0.250
	0.005	-0.913	-0.435

结构在 2 个工况下, 上表面中点的竖向位移列入表 4, 结果表明, 在不同的控制成本下, 上述结构拓扑能够较好地实现设计目标.

表 4 两个工况下结构输出点位移与设计目标的对比

Table 4 Comparison of the output-displacements under the two loading-cases with the design displacements

	μ	Objective	Deflection	Error/%
case 1	0.1		-0.100	0
	0.05		-0.100	0
	0.005	-0.1	-0.100	0
case 2	0.1		-0.100	0
	0.05		-0.100	0
	0.005		-0.100	0

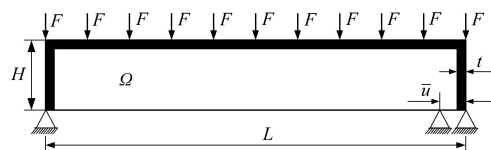
3.2 算例 2

设计图 6(a) 和图 6(b) 所示矩形梁结构, 使得在最小的补偿成本下, 保持上表面在不同承载工况下的几何稳定性. 设计参数如下: $L = 180$, $H = 30$, 结构的基体材料弹性模量 $E = 69$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 结构承受 2 个工况载荷: 工况 1, 上表面作用 11 个大小相等的集中载荷, 每个载荷大小为 $F = 0.15$ (图 6(a)); 工况 2, 结构上表面作用载荷集度为 $q=0.2$ 的均布载荷 (图 6(b)). 设计要求为上述 2 个工况下, 上表面竖向位移满足函数 $v = -0.1 \sin(\pi x/L)$. 结构的右下支座

为位移补偿区域, 施加一大小可调的水平方向补偿位移, 幅值为 2. 给定材料用量为 0.4, 其中结构上表面和左右两边为非设计域, $t = 2$.

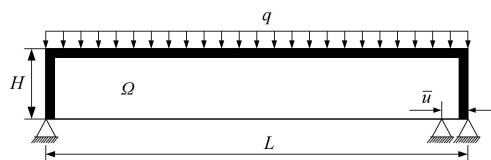
本例输出位移采样点为上表面每距离为 5 的各点. 权重系数 $\beta = 0.001$. 考虑到结构的对称性, 取结构的 1/2 为研究对象, 并划分网格 90×30 . 不同控制成本 ($\mu = 0.1$, $\mu = 0.01$) 下, 结构拓扑如图 6(c) 和图 6(d) 所示, 结构在 2 个工况下的最终补偿位移变量值列入表 5.

输出点位移与设计位移的比较表明, 若控制成本过于苛刻, 结构难以实现预期变形响应 (图 7(b)); 但是, 在较合理的控制成本下, 利用位移补偿结合拓扑优化技术, 可以较有效实现结构特定位置的变形稳定性 (图 7(a)).



(a) 工况 1

(a) Loading-case 1



(b) 工况 2

(b) Loading-case 2

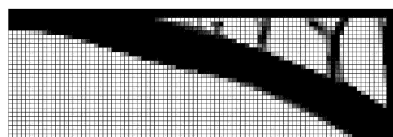
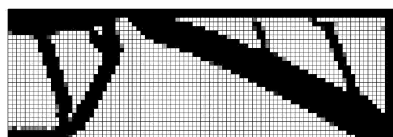
(c) 1/2 结构拓扑, $\mu = 0.1$ (c) Topology of a half structure, $\mu = 0.1$ (d) 1/2 结构拓扑, $\mu = 0.01$ (d) Topology of a half structure, $\mu = 0.01$

图 6 输出端为上表面的结构模型及设计结果

Fig. 6 Design model and result for a structure with output displacement on upper boundary

表 5 算例 2 结构 2 个工况下的补偿位移

Table 5 Compensation displacements of the structure in example 2 under two loading-cases

	μ	Loading-case 1	Loading-case 2
δ	0.1	-0.338	-0.717
	0.01	-0.575	-1.000

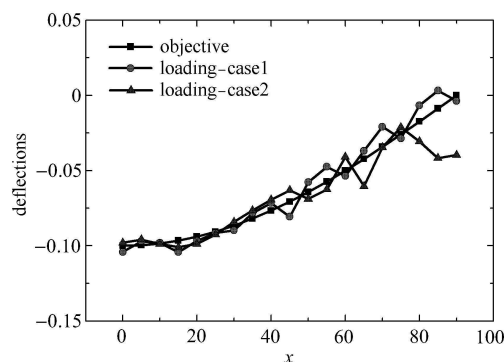
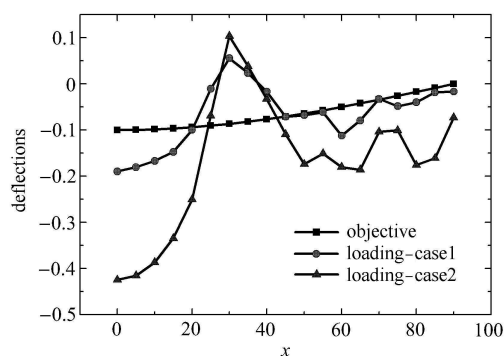
(a) $\mu = 0.1$ (b) $\mu = 0.01$

图 7 不同工况下输出位移与设计目标对比

Fig. 7 Comparison of the output displacement under different loading-cases with the design objective

4 讨论

本优化模型目标函数为形式上的多目标格式, 目标函数的第 2 项保证了结构具有必要的承载能力. 第 2 项的存在会在一定程度上影响结构输出位移的几何稳定性, 若忽略第 2 项, 计算结果将有可能产生没有承载能力的结构, 在拓扑形式则表现为在结构承载的关键区域出现大量灰度单元或空单元. 例如本文的算例 1, 若取 $\beta = 0$, 则所得结构完全满足变形的几何稳定性要求, 但是得到的结构对于工况 2 并不具备承载能力 (图 8). 实际上, 在以结构输出位移为目标的其他设计 (如柔性机构设计) 中, 若目标函

数或者约束函数中不含有结构的承载性能因素, 均容易产生包含大量灰度单元的无承载价值结构^[8-9].

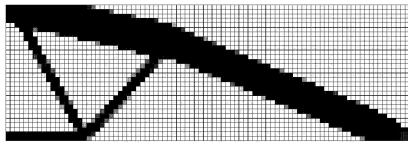


图 8 未考虑结构承载能力的 1/2 结构拓扑

Fig. 8 Topology of a half structure without loading-bearing capacity

控制成本影响结构的最终拓扑, 并在一定程度上制约结构输出位移的几何稳定性精度. 算例结果表明, 本文构造的控制成本模型能够较合理地定性反映位移补偿的投入成本影响. 若控制成本过于苛刻, 超出了位移补偿的工作范围, 所得到的结构输出位移将难以满足理想预期 (图 7(b)), 或者虽然输出位移精度较高但是以牺牲结构的承载能力为代价 (图 5(e)); 反之, 较宽松的成本投入会相应产生高精度的输出位移并同时保证结构的承载能力. 成本控制事实上符合投入和产出的经典关系. 实际工程设计则需要在成本和收益之间做出进一步的平衡, 给出合理的控制成本.

此外, 需要说明的是, 本文所讨论问题并非严格的形状控制问题, 本文重点在于研究在最小的补偿成本下, 实现多工况结构的特定位置保持几何稳定性的设计方法. 补偿位移对变形的控制仅仅是辅助作用, 补偿位移通常数量较少, 因此对于复杂的变形目标难以产生理想的控制效果. 增加补偿位移的数量能够较好地改善变形效果, 但是同时也增加了实际工程实现上的困难. 关于严格的形状控制方面研究, 可参考文献 [10] 及其引用论文.

5 结 论

本文采用分层优化的方式建立了位移补偿结构的拓扑优化设计模型, 通过对结构拓扑和补偿位移的并发设计, 实现了满足结构位移响应几何稳定性

要求的结构刚度设计方法. 算例表明本文方法具有较好的设计精度.

参 考 文 献

- 1 杨东武, 仇原鹰, 段宝岩. 预应力索网天线结构优化设计. 应用力学学报, 2008, 25(4): 617-622 (Yang Dongwu, Qiu Yuanying, Duan Baoyan. New method for prestressed astromesh deployable antenna design. *Chinese Journal Of Applied Mechanics*, 2008, 25(4): 617-622 (in Chinese))
- 2 隋允康, 龙连春. 智能抛物面天线多目标最优控制. 计算力学学报, 2005, 22(6): 671-677 (Sui Yunkang, Long Lianchun. Multi-objective optimum control of intel ligent parabolic antennas. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(6): 671-677 (in Chinese))
- 3 Bendsoe MP, Diaz A, Kikuchi N. Topology and generalized layout optimization of elastic structures. In: Bendsoe MP, Soares CAM, editors. *Topology Design of Structures*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. 159-205
- 4 Pedersen P, Pedersen N. Design objectives with non-zero prescribed support displacements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(2): 205-214
- 5 Niu F, Xu S, Cheng G. A general formulation of structural topology optimization for maximizing structural stiffness. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(4): 561-572
- 6 苏文政. 基于偶应力理论的多孔固体材料与结构的分析与设计. [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 2009 (Su Wenzheng. Material and structural analysis and design of cellular solids based on the couple-stress theory. [PhD Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2009 (in Chinese))
- 7 Svanberg K. The method of moving asymptotes—A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(22): 359-373
- 8 Nishiwaki S, Frecker MI, Min S, et al. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 42(3): 535-559
- 9 Pedersen CBW, Buhl T, Sigmund O. Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(12): 2683-2705
- 10 Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation. *Engineering Structures*, 2002, 24(1): 5-11

(责任编辑: 周冬冬)

TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR GEOMETRIC STABILITY OF STRUCTURES WITH COMPENSATION DISPLACEMENTS¹⁾

Su Wenzheng^{*,2)} Zhang Yongcun[†] Liu Shutian[†]

^{*}(School of Civil and Safety Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

[†](State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract The special parts of structures are always required to be geometric stable on output displacements under different loadings in many engineering cases. Introduction of the adjustable compensation displacements in the special region of structures is the effective technique. In the scope of the linearly elasticity and small deformation, the purpose of this paper is to study the topology optimization of structures with the geometric stability in the given region through the lowest compensation cost. The objective of the present optimization model is to obtain the maximum stiffness of structures with the stable ideal displacement responses of structural given region. There are two types of design variables in the model which are the structural topology variables and the compensation displacement variables. These two types of variables are coupled through the two-level search method. The adjoint method is performed to compute the sensitivities of the objective function with respect to the two types of variables respectively. The results show that the present optimization formulation can realize the objective of shape control of structures through the low controlling cost.

Key words structural optimization, topology optimization, displacement compensation method, shape control, sensitivity analysis

Received 26 October 2012, revised 27 December 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11002031, 11202246, 11172052), the Liaoning Province Doctor Startup Fund (20101008) and Program for Liaoning Excellent Talents in University (LJQ2012040).

2) Su Wenzheng, associate professor, research interests: structural optimization and simultaneous design of material and structures.
E-mail: wzhsu@djtu.edu.cn