第 45 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 45，No. 2
2013 年 3 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Mar.，2013

研究简报

考虑横向和扭转剪切变形的空间薄壁梁单元[1)]

王晓峰[2)] 杨庆山

(北京交通大学土建学院，北京 100044)

摘要 基于 Timoshenko 梁及 Benscoter 薄壁杆件理论，建立了考虑剪切变形、弯扭耦合以及翘曲剪应力影响的空间任意开闭口薄壁截面梁单元. 通过引入单元内部结点，对弯曲转角和翘曲角采用三节点 Lagrange 独立插值的方法，考虑了剪切变形和翘曲剪应力的影响并避免了横向剪切锁死问题；借助载荷作用下薄壁梁的截面运动分析，在位移和应变方程中考虑了弯扭耦合的影响. 通过数值算例将该单元的计算结果与理论解以及商用有限元软件和其他文献中的数值解进行对比和验证，结果对比表明该薄壁梁单元具有良好的精度和收敛性.

关键词 薄壁梁, 任意开闭口截面, 空间梁单元, Benscoter 理论, 刚度矩阵

中图分类号：TU323.3 **文献标识码**：A DOI：10.6052/0459-1879-12-218

引 言

薄壁梁广泛应用于土木、机械以及航空航天等工程领域. 自 Vlasov[1] 和 Timoshenko 等 [2] 以来，许多学者对薄壁梁进行了广泛的研究 [3].

早期，薄壁梁的弯曲问题研究主要基于 Bernoulli-Euler 梁理论，随后一些文献 [4-5] 在研究中考虑了剪切变形的影响. 而有限元中考虑剪切变形的方法主要有 3 种：(1) C_0 连续型 Timoshenko 梁单元 [6-7]，当横向位移和弯曲转角采用同阶插值时该方法会导致剪切锁死问题. (2) 修正的 Hermit 插值函数的方法 [8-9]，在弯曲位移场的插值函数中增加两个常数项来考虑剪切变形的影响. (3) 基于 Hellinger-Reissner 双场变分原理的梁单元 [3,10-11]，它在势能泛函中引入独立的应力场, 难以用于几何非线性分析.

当薄壁梁的横截面有一个非对称形心主轴时，在沿该轴方向的横向力作用下会引起弯扭耦合变形. 文献 [7,12-13] 根据载荷作用下薄壁梁的截面运动分析，建立了考虑弯扭耦合影响的位移和应变方程. 文献 [14-15] 将这种耦合影响作用拓展到动力领域，研究了薄壁梁的弯扭耦合振动.

薄壁梁发生约束扭转时，截面上的翘曲剪应力会对扭转变形产生一定的影响. 通常考虑翘曲剪应力影响的方法主要有 3 种：(1) 采用约束扭转微分方程的齐次解作为单元扭转角和翘曲角的插值函数的方法 [12-13,16] 考虑翘曲剪应力的影响. 这样得到的扭转位移场 (扭转角和翘曲角) 插值函数为双曲函数，虽然单元精度好，但推导出的刚度矩阵很复杂，应用不方便. (2) 修正 Hermit 插值函数的方法 [9]，它在扭转位移场插值函数中引入一个常数项考虑翘曲剪应力的影响. (3) 基于应力场为变量的能量方程 (Hellinger–Reissner 双场变分原理 [3]，余能原理 [17]) 的梁单元. 后两种方法均是以开口截面为假定条件，无法用于闭口薄壁梁. 从现有文献来看，可以考虑翘曲剪应力影响而形式简洁并适用于开闭口截面型式的薄壁梁单元还未见到.

鉴于此，本文基于前面对开口薄壁梁单元的研究 [18-21]，建立了可考虑剪切变形、弯扭耦合以及翘曲剪应力等因素影响的空间开闭口薄壁截面梁单元. 然后采用 C#.NET 将其编制成有限元程序，对算例进行数值分析，将计算结果与材料力学和薄壁杆件力学的理论解以及商用有限元软件和其他文献中的数值解进行对比，验证所建薄壁梁单元的精确性和收敛性.

1 应变和应力

为便于力学描述，薄壁梁采用 2 种坐标系：笛卡尔直角坐标系 (x, y, z) 和曲线坐标系 (x, s, n). 直角坐标系中，x 为过截面形心的纵轴，y 和 z 为横截面的形心主惯性轴；曲线坐标系中，s 和 n 分别为横截面

2012–08–06 收到第 1 稿，2012–09–07 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目 (51278049, 90815021, 51078026).
2) 王晓峰，讲师，主要研究方向：薄壁结构和薄膜结构. E-mail: wangxiaof@bjtu.edu.cn

中线的切向和法向坐标.

根据文献 [7,12-13]，薄壁梁横截面上任意一点 $P(x,y,z)$ 的位移向量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 可以写为

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \{u \ \ \xi\}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{u} \tag{1}$$

式中，u 为轴向位移；ξ 为切向位移；

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_u \\ \boldsymbol{\Phi}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & -\omega \\ 0 & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} & \rho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中，ω 为扇性坐标，s 为自然坐标；

$$\boldsymbol{u} = \{u_0 \ \ v_s \ \ w_s \ \ \theta_x \ \ \theta_y \ \ \theta_z \ \ \theta\}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

为空间薄壁梁的位移向量；u_0 为截面形心处的轴向位移；v_s 和 w_s 分别为截面剪心沿 y 和 z 轴的位移；θ_x，θ_y 和 θ_z 分别为截面绕 x, y 和 z 轴的转角；θ 为翘曲角. 由几何方程，P 点的应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{sx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_u \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_u}{\partial s} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Phi}_\xi \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

式中 ε_x 和 γ_{sx} 分别为 P 点的正应变和剪应变. 于是 P 点的应力向量可表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_x \quad \tau_{sx}\right\}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵.

$$\tau_{sx} = \tau_{sxb} + \tau_{\mathrm{B}} + \tau_\omega \tag{6}$$

式中，τ_{sxb} 为弯曲剪应力；τ_ω 为翘曲剪应力；τ_{B} 为 Bredt 剪应力，对于开口截面 $\tau_{\mathrm{B}} = 0$.

2 形函数矩阵

根据作者前面的研究工作 [18-21]，引入单元内部结点，轴向位移采用两结点 Lagrange 插值函数；横向位移和扭转角采用两结点 Hermit 插值函数；弯曲转角和翘曲角采用三结点 Lagrange 插值函数. 这样，单元位移场可由结点位移表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}_0 \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵. $\boldsymbol{u}_0$ 为结点位移向量，并可表示为 [18-21]

$$\boldsymbol{u}_0 = \{(\boldsymbol{u}_E)^{\mathrm{T}}_{14\times1} \ \ (\boldsymbol{u}_I)^{\mathrm{T}}_{9\times1}\}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{u}_E$ 为外部结点位移, $\boldsymbol{u}_I$ 为内部结点位移.

将式 (8) 代入式 (4) 得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}_0 \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 为几何矩阵. 将式 (10) 代入式 (5) 得

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}_0 \tag{10}$$

3 单元刚度矩阵

根据虚功原理可得单元结点力的平衡方程为

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{Q} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 为单元刚度矩阵，且

$$\boldsymbol{K} = \int_V \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \tag{12}$$

$\boldsymbol{Q}$ 为等效结点载荷向量. 将式 (11) 中单元内部自由度凝聚后可得

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_E = \boldsymbol{f} \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为凝聚后的单元刚度矩阵和单元结点载荷向量. 式 (13) 为基于单元剪心得到的刚度矩阵，在转换到整体坐标系下时应通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 先转换到形心处，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}_{7\times7} \\ \boldsymbol{0}_{7\times7} & \boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{I}_{7\times7} + \boldsymbol{A}_2 \tag{15}$$

$\boldsymbol{I}_{7\times7}$ 为 7×7 的单位矩阵；$(\boldsymbol{A}_2)_{2,4} = -z_s$，$(\boldsymbol{A}_2)_{3,4} = y_s$，其余元素均为 0，$y_s$ 和 z_s 为剪心坐标.

4 算 例

根据所建立的薄壁梁单元，采用 C#.NET 编制了相应的有限元程序，通过算例将计算结果与材料力学和薄壁杆件力学的理论解以及商用有限元软件和其他文献的数值解进行对比和验证.

4.1 算例 1

为了验证本文梁单元在考虑剪切变形影响后，是否会发生剪切锁死问题，对自由端受弯矩 M_y = 1 kN·cm 作用的细长悬臂梁进行纯弯分析 (梁长为 400 cm)，截面尺寸如图 1(a) 所示，弹性模量 E = 210 GPa，泊松比 $\mu = 0.25$.

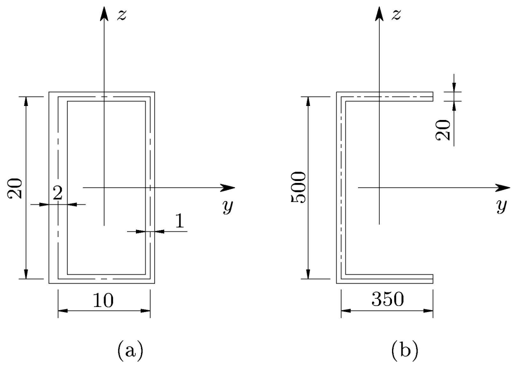

图 1 截面尺寸 (cm)

Fig. 1 Cross sections (cm)

采用本文梁单元计算得到的自由端弯曲位移和弯曲转角与材料力学理论解完全一致，分别为 9.523 8 μm 和 4.7619×10^{-6} rad，说明该单元没有伪剪切刚度，分析细长梁时不会发生剪切锁死问题.

4.2 算例 2

一端完全约束，另一端受扭矩 (M_x = 1 MN·m) 作用的剪力墙 [9], 截面尺寸如图 1(b) 所示，长度为 18 m，弹性模量 E = 30 GPa，剪切模量 G = 13 GPa.

为便于比较，分析计算时采用 6 个单元，与文献 [7, 9] 的单元数目相同. 扭转角计算结果及对比如图 2 所示. 图中 x 为距约束端的距离，h 为截面高度，θ_x 为本文梁单元或文献 [7, 9, 22] 计算得到的扭转角，θ_x^* 为文献 [1] 计算得到的扭转角.

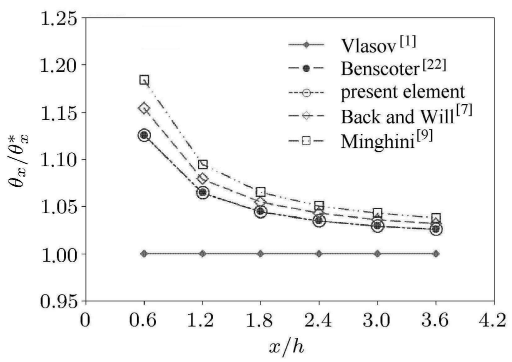

图 2 扭转角

Fig. 2 Torsional angles

从图 2 可以看出：本文梁单元计算得到的扭转角与 Benscoter[22] 理论的解析解完全一致，精度优于文献 [7, 9]；在约束区附近，翘曲剪应力影响非常显著，采用不考虑翘曲剪应力影响的 Vlasov[1] 理论误差会很大 (x/h = 0.6 处，误差大于 12%).

4.3 算例 3

自由端受扭矩 M_x = 1 kN·cm 作用的悬臂梁截面尺寸如图 1(a) 所示，梁长为 2 m，材料常数同算例 1. 采用本文梁单元的计算结果与 Benscoter[22] 理论的解析解以及 ANSYS 的 Shell181 壳单元和可以考虑翘曲变形的 Beam189 梁单元的数值解进行对比如表 1 所示.

表 1 扭转角和翘曲角

Table 1 Torsional rotation and warping function

Methods	Elements	θ_x/rad	θ/(rad·cm^{-1})
Benscoter	—	7.2784×10^{-6}	3.6443×10^{-8}
Shell181	1 952	7.2817×10^{-6}	3.6753×10^{-8}
present element	4	7.2758×10^{-6}	3.6441×10^{-8}
Beam189	4	6.9070×10^{-6}	2.7035×10^{-8}

从表 1 可以看出本文梁单元的计算结果与 Benscoter 理论解和壳单元 Shell181 的数值解基本一致，具有良好的精度，优于 Beam189 的计算结果.

5 结 论

本文基于前人对开口薄壁梁单元的研究工作，建立了空间任意开闭口薄壁截面梁单元. 通过设置单元内部结点，引入内部自由度的方法，考虑了剪切变形和翘曲剪应力的影响，同时避免了剪切锁死问题. 根据载荷作用下薄壁梁横截面的运动规律，建立了考虑弯扭耦合影响的位移和应变方程. 通过基于该单元模型编制的有限元程序对算例进行分析计算，将计算结果与材料力学和薄壁杆件力学的理论解以及商用有限元软件和其他文献中的数值解进行对比验证. 结果对比表明，本文梁单元不存在剪切锁死现象，具有良好的精度和收敛性，优于商用有限元软件和文献中的薄壁梁单元.

参 考 文 献

1 Vlasov VZ. Thin Walled Elastic Beams. London: Oldbourne Press, 1961

2 Timoshenko SP, Gere JM. Theory of Elastic Stability. 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 1961

3 Kim NI, Kim MY. Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects. *Thin Walled Struct*, 2005, 43(5): 701-734

4 Vo TP, Lee JH. Geometrical nonlinear analysis of thin-walled composite beams using finite element method based on first order shear deformation theory. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, 81(4): 419-435

5 Alsafadie R, Hjiaj M, Battini JM. Three-dimensional formulation of a mixed co-rotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation. *Thin Walled Struct*, 2011, 49(4): 523-533

6 Gendy AS, Saleeb AF, Chang TYP. Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis. *Comput Struct*, 1992, 42(4): 531-550
7 Back SY, Will KM. A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams. *Int J Numer Methods Eng*, 1998, 43(7): 1173-1191
8 Bazoune A, Khulief YA, Stephen NG. Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element. *J Sound Vib*, 2003, 259(2): 473-480
9 Minghini F, Tullini N, Laudiero F. Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams. *Int J Numer Methods Eng*, 2007, 72(7): 808-834
10 Tralli A. Simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams. *Comput Struct*, 1986, 22(4): 649-658
11 Alsafadie R, Hjiaj M, Battini JM. Three-dimensional formulation of a mixed co-rotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation. *Thin Walled Struct*, 2011, 49(4): 523-533
12 Hu YR, Jin XD, Chen BZ. Finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections. *Comput Struct*, 1996, 61(5): 897-908.
13 Prokic A. Stiffness method of thin-walled beams with closed cross-section. *Comput Struct*, 2003, 81: 39-51
14 Li J, Shen RY, Hua HX, et al. Coupled bending and torsional vibration of axially loaded thin-walled Timoshenko beams. *Int J Mech Sci*, 2004, 46(2): 299-320
15 Borbon F, Mirasso A, Ambrosini D. A beam element for coupled torsional-flexural vibration of doubly unsymmetrical thin walled beams axially loaded. *Comput Struct*, 2011, 89(13-14): 1406-1416
16 Wang ZQ, Zhao JC, Zhang DX, et al. Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects. *J Zhejiang Univ-Sci A*, 2012, 13(4): 260-273
17 Erkmen RE, Mohareb M. Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects. *Thin Walled Struct*, 2006, 44(10): 1096-1108
18 Wang XF, Yang QS. Geometrically nonlinear finite element model of spatial thin-walled beams with general open cross section. *Acta Mech Solida Sin*, 2009, 22(1): 64-72
19 Wang XF, Zhang QL, Yang QS. A new finite element of spatial thin-walled beams. *J Appl Math Mech*, 2010, 31(9): 1141-1152
20 Wang XF, Yang QS, Zhang QL. A new beam element for analyzing geometrical and physical nonlinearity. *Acta Mech Sin*, 2010, 26(4): 605-615
21 Yang QS, Wang XF. A geometrical and physical nonlinear finite element model for spatial thin-walled beams with arbitrary section. *Sci China Ser E*: *Technol Sci*, 2010, 53(3): 829-838
22 Benscoter SU. A theory of torsion bending for multicell beams. *J Appl Mech*, 1954, 53: 25-34

(责任编辑: 刘希国)

A NEW SPATIAL THIN-WALLED BEAM ELEMENT INCLUDING TRANSVERSE AND TORSIONAL SHEAR DEFORMATION [1)]

Wang Xiaofeng[2)] Yang Qingshan
(*School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University*，*Beijing* 100044，*China*)

Abstract Based on the Timoshenko and Benscoter's theory, a new spatial thin-walled beam element with an arbitrary open or closed cross section is proposed in this paper, accounting for the influences of shear deformation, flexural and torsional coupling and warping shear stress. With introduction of an interior node to the element, three-node interpolation functions are adopted for bending angles and warping angle to consider shear deformation and warping shear stress, and to avoid shear locking simultaneously. Through a kinematic description of the cross section of a deformed thin-walled beam under loads, the flexural-torsional coupling is included in the displacement and strain equations. In order to verify its accuracy and convergence, some numerical examples are analyzed and their results obtained from the present element are compared with theoretical solutions and numerical solutions of the commercial finite element software and other literatures. Comparisons indicate that the present element is free of shear locking and more accurate than those beam elements presented in other documents.

Key words thin-walled beam, arbitrary open or closed cross section, spatial beam element, Benscoter's theory, stiffness matrix

Received 6 August 2012, revised 7 September 2012.
1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (51278049, 90815021, 51078026).
2) Wang Xiaofeng, lecturer, research interests：thin-walled structures and thin-membrane structures. E-mail：wangxiaof@bjtu.edu.cn