

非傅里叶热弹性的时域间断迦辽金有限元方法¹⁾郭攀* 武文华^{*,2)} 吴志刚[†]

*(大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

†(大连理工大学运载工程与力学学部航空航天学院, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 基于 Lord-Shulman 非傅里叶热弹性模型, 提出了采用修正的时域间断迦辽金有限元方法 (time discontinuous Galerkin finite element method, DGFEM) 求解方法. DGFEM 对温度场、位移场基本未知向量及其时间导数向量在时域中分别插值; 在最终的求解公式中, 引入了人工阻尼. 数值结果显示所发展的 DGFEM 较好地捕捉了波的间断并消除了热冲击作用下虚假的数值振荡, 能够良好地模拟热弹性问题并具有较高的精度.

关键词 广义热弹性, 时域间断迦辽金有限元方法, 热冲击, 数值振荡

中图分类号: TK121 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-217

引言

经典的热弹性傅里叶定律认为热流矢量与温度梯度成正比, 其隐含了热波以无限大速度传播, 这与实验观测结果不相符^[1-4]. 对于金属材料, 当热作用时间达到皮秒 (1 ps) 甚至飞秒 (1 fs) 量级时, 就需要考虑热传导中的松弛行为, 热流矢量与温度梯度存在时间延迟. 针对固体中这类非傅里叶热传导次声效应, 学者们提出了热力耦合的广义热弹性理论.

目前, 基于热流有限速度传播的广义热弹性理论主要有 Lord 和 Shulman 建立的包含 1 个松弛参数的 Lord-Shulman 理论^[5]、Green 和 Lindsay 建立的包含 2 个松弛参数的 Green-Lindsay 理论^[6]以及 Green 和 Naghdi^[7]建立在能量平衡和熵基础上的 Green-Naghdi 理论等.

广义热弹性问题包含温度场与位移场的耦合, 在数值模拟方面, 目前主要使用差分法、有限元法^[2,8-9]、边界元等数值方法对广义热弹性问题进行数值模拟. 上述方法在时域处理上往往利用差分法对问题进行求解, 在物理量强间断、高梯度变化问题的数值模拟中不能很好地捕捉波阵面的间断、再现数值解空间高梯度变化, 并且往往带来不必要的数值振荡. 本文针对原时域间断迦辽金有限元方法 (time discontinuous Galerkin finite element method, DGFEM)^[10]在强间断、高梯度变化的数值模拟过程

中, 往往能较快地滤去波后数值振荡的同时, 波前却出现不必要的数值振荡的特点, 提出人工阻尼的策略, 对 DGFEM 进一步修正. 基于 Lord-Shulman 理论, 利用修正的 DGFEM 对冲击热源作用下的广义热弹性问题进行求解. 数值结果显示, 对比传统的时域方法, 修正的 DGFEM 可有效地避免波前波后数值震荡, 并保持较高的精度.

1 Lord-Shulman 基本控制方程以及 DGFEM 求解方程

考虑线性广义热弹性 Lord-Shulman 模型, 其热力耦合基本控制方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho c \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \tau_0 T_0 \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \\ T_0 \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Q^T \\ \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = Q^U \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, λ, μ 为拉梅常数, ρ 为材料密度, c 为材料比热, K 为热传导系数, T_0 为初始温度, τ_0 为材料延迟时间.

为方便计算, 通常进行如式 (2) 所示无量纲化处理

2012-12-06 收到第 1 稿, 2013-02-26 收到修改稿.

1) 国家重点基础研究发展规划 (2011CB013705), 国家重大专项 (2011ZX05026-002-02) 和创新研究群体研究基金 (50921001) 资助项目.

2) 武文华, 副教授, 主要研究方向: 计算力学. E-mail: lxyuhua@dlut.edu.cn

$$\left. \begin{aligned} & \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \tau a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \\ & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f^\theta \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f^u \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\tau = \frac{\tau_0 c(\lambda + 2\mu)}{K}$, $\beta_1 = \frac{\beta T_0}{\lambda + 2\mu}$, $a = \frac{\beta}{\rho c}$.

定义 θ 和 u 为基本未知量, 采用标准的迦辽金有限元方法, 将式 (2) 各项进行有限元空间离散后可得

$$\left. \begin{aligned} M^{\theta\theta} &= \int_{\Omega} \tau N_{\theta} N_{\theta} d\Omega, \quad M^{uu} = \int_{\Omega} N_u N_u d\Omega \\ M^{\theta u} &= \int_{\Omega} \tau a N_{\theta} B_u d\Omega, \quad C^{\theta\theta} = \int_{\Omega} N_{\theta} N_{\theta} d\Omega \\ C^{\theta u} &= \int_{\Omega} \beta_1 N_{\theta} B_u d\Omega, \quad K^{\theta\theta} = \int_{\Omega} B_{\theta} B_{\theta} d\Omega \\ K^{u\theta} &= \int_{\Omega} a B_u N_{\theta} d\Omega, \quad K^{uu} = \int_{\Omega} B_u B_u d\Omega \\ f^{\theta} &= \int_{\Omega} N_{\theta} Q^{\theta} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 N_{θ} 和 N_u 分别为温度场和位移场形函数; B_{θ} 和 B_u 为相应形函数的空间一阶导数. 定义

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} M^{\theta\theta} & M^{\theta u} \\ \mathbf{0} & M^{uu} \end{bmatrix} &= \mathbf{M}, \quad \begin{bmatrix} C^{\theta\theta} & C^{\theta u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \\ \begin{bmatrix} K^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ K^{u\theta} & K^{uu} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} f^{\theta} \\ f^u \end{Bmatrix} \\ \mathbf{U}' &= \begin{Bmatrix} \theta \\ u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}' = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则式 (2) 可表示为

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}' + \mathbf{C}\mathbf{V}' + \mathbf{K}\mathbf{U}' = \mathbf{F} \quad (5)$$

DGFEM 的特点在于时域离散时允许基本未知函数 $\mathbf{U}'$ 与其导数 $\mathbf{V}'$ 在离散点处间断, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}'_n &= \mathbf{U}'(\tau_n^+) - \mathbf{U}'(\tau_n^-) \\ \mathbf{V}'_n &= \mathbf{V}'(\tau_n^+) - \mathbf{V}'(\tau_n^-) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此 DGFEM 在 τ_n 时刻的基本未知量为 $\mathbf{U}'(\tau_n^+)$, $\mathbf{U}'(\tau_n^-)$, $\mathbf{V}'(\tau_n^+)$, $\mathbf{V}'(\tau_n^-)$.

为了滤掉标准 DGFEM 方法产生的波前数值不准确性, 引入如下形式的人工阻尼

$$\mathbf{C}_w = \beta_c \mathbf{K} + \mathbf{C} \quad (7)$$

其中 β_c 为阻尼因子.

对未知函数 $\mathbf{U}'$ 与其导数 $\mathbf{V}'$ 作为独立的变量进行变分, 并选取控制条件 $\dot{\mathbf{U}}' - \mathbf{V}' = \mathbf{0}$ 构造广义热弹性模型的 DGFEM 的弱形式表示为

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} \delta \mathbf{V}'^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}' + \mathbf{C}_w \mathbf{V}' + \mathbf{K}\mathbf{U}' - \mathbf{F}) dt + \\ & \int_{I_n} \delta \mathbf{U}'^T \mathbf{K}(\dot{\mathbf{U}}' - \mathbf{V}') dt + \delta \mathbf{U}'_n^T \mathbf{K}[\mathbf{U}'_n] + \\ & \delta \mathbf{V}'_n^T \mathbf{M}[\mathbf{V}'_n] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

将式 (8) 对于 $\delta \mathbf{U}'_n$, $\delta \mathbf{U}'_{n+1}$, $\delta \mathbf{V}'_n$, $\delta \mathbf{V}'_{n+1}$ 分别独立变分, 最终可得 DGFEM 求解公式如式 (9) 所示.

$$\mathbf{U}'_n^+ = \mathbf{U}'_n^- \quad (9a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{C}_w - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t}{6} \mathbf{C}_w - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{K} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_w + \frac{\Delta t^2}{3} \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_w + \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}'_n \\ \mathbf{V}'_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e - \mathbf{F}_2^e + \mathbf{M}\mathbf{V}'_n^- \\ \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e + \mathbf{M}\mathbf{V}'_n^- - \Delta t \mathbf{K}\mathbf{U}'_n^- \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

$$\mathbf{U}'_{n+1} = \mathbf{U}'_n^- + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{V}'_n + \mathbf{V}'_{n+1}) \quad (9c)$$

其中

$$\mathbf{F}_1^e = \frac{\Delta t}{3} \mathbf{F}_n^e + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{F}_{n+1}^e, \quad \mathbf{F}_2^e = \frac{\Delta t}{6} \mathbf{F}_n^e + \frac{\Delta t}{3} \mathbf{F}_{n+1}^e$$

2 算例分析

算例 1 考虑如图 1(a) 无量纲长为 0.25 的一维广义热弹性问题. 结构左端作用如下阶跃冲击热源

$$f^{\theta} = \begin{cases} 100, & 0 \leq t \leq 5 \times 10^{-3} \\ 0, & t > 5 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (10)$$

结构划分成 100 个单元, 时间步长为 10^{-3} . 阻尼因子取为时间步长的 0.1 倍. 其他参数为 $\beta_1 = 5.035 \times 10^{-3}$, $a = 0.926$, $\tau = 0.1^{[8]}$.



图 1 一维热弹性模型

Fig. 1 One dimensional model of thermo-elastic problem

图 2 和图 3 分别给出了 $t = 0.025$ 和 $t = 0.05$ 时刻利用本文所提出的 DGFEM 和 Newmark 法计算得到的温度场以及应力波分布. DGFEM 相对于 Newmark 法较地的滤去了热传导及应力波传播过程中的数值振荡现象.

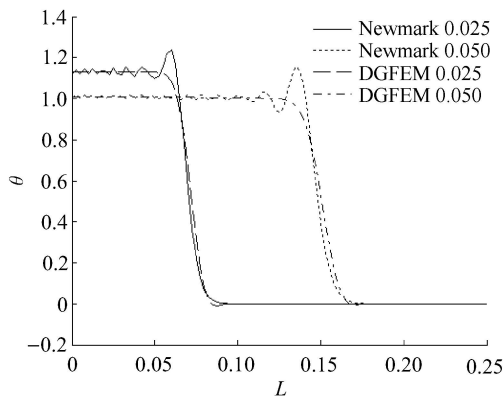


图 2 Newmark 与 DGFEM 不同时刻温度比较图
Fig. 2 Temperature between Newmark and DGFEM

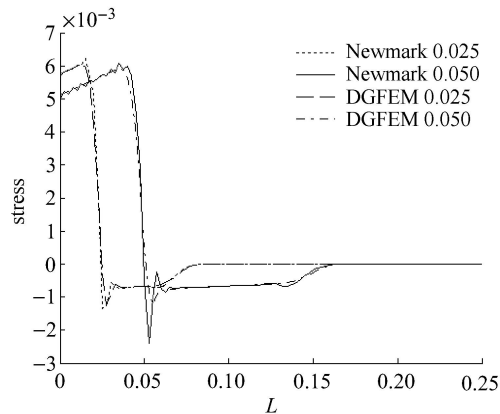


图 3 Newmark 与 DGFEM 不同时刻应力比较图
Fig. 3 Stress between Newmark and DGFEM

算例 2 考虑如图 4 的二维平面受热冲击的广义热弹性问题, x, y 方向无量纲长度均为 0.1, 模型网格划分为 25×25 , 点 A(0,0.1) 处受到同算例 1 中阶跃冲击热源作用. 下边界及右边界温度始终为 0, 结构材料参数同算例 1. 图 5 和图 6 给出了采用 DGFEM 计

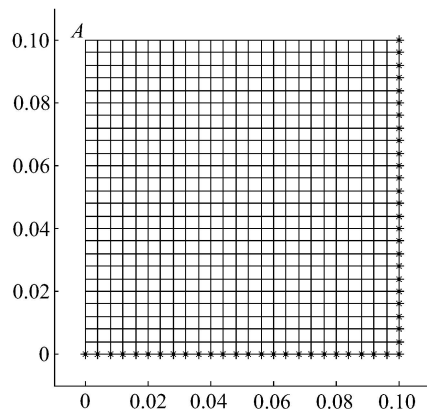


图 4 二维分析模型网格划分及约束条件
Fig. 4 Mesh of two dimension model and conditions

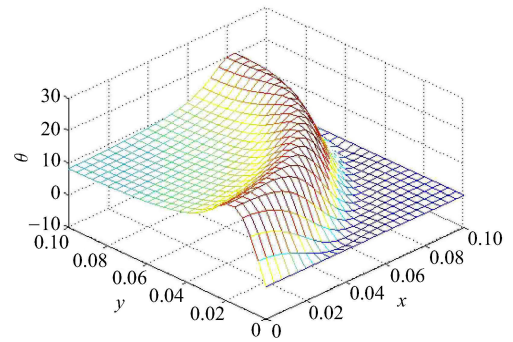


图 5 DGFEM 法在 $t = 0.030$ 时的温度分布
Fig. 5 Temperature profiles with DGFEM at $t = 0.030$

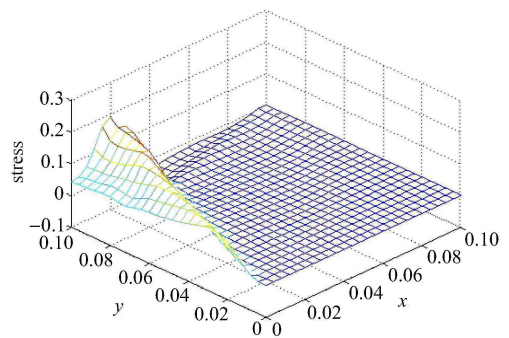


图 6 DGFEM 法在 $t = 0.030$ 时的温度和应力分布
Fig. 6 Temperature and stress profiles with DGFEM at $t = 0.030$

算得到的无量纲 0.030 时刻温度分布图及在 x 方向上应力波分布图. 结果显示 DGFEM 能良好地捕捉波阵面的间断并滤去了波传播过程中数值振荡现象.

3 结 论

本文针对冲击热源作用下 Lord-Shulman 模型的广义热弹性问题发展了时域间断 Galerkin 有限元方法. 算法中对于温度场和位移场所构成的广义节点自由度和其时间导数分别插值. 同时引入人工阻尼处理, 有效地滤去波前的数值振荡. 算例结果表明 DGFEM 能较好地捕捉到热波以及应力弹性波的空间的高梯度变化现象, 并较好地消除强间断热波以及应力波传播过程中的数值振荡现象.

参 考 文 献

- 1 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展. 力学进展, 2012, 42(1): 18-28 (Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. Research progress in generalized thermoelastic problems. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(1): 18-28 (in Chinese))
- 2 蒋方明, 刘登瀛. 非傅里叶导热的最新研究进展. 力学进展, 2002, 32(1): 128-139 (Jiang Fangming, Liu Dengying. New progress on non-fourier heat conduction. *Advances in Mechanics*, 2002, 32(1): 128-139 (in Chinese))

- 3 Tamma KK, Namburu RR. Computational approaches with applications to nonclassical and classical thermo-mechanical problems. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, 50(9): 514-551
- 4 刘静等编著. 微米 / 纳米尺度传热学. 北京: 科学出版社, 2001 (Liu Jing. Micro/nano Scale Heat Transfer. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))
- 5 Lord H, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15: 299-309
- 6 Green AE, Lindsay KE. Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 1972, 2: 1-7
- 7 Green AE, Naghdi PM. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, 1993, 31: 189-208
- 8 Strunin DV, Melnik RVN, Roberts AJ. Coupled thermomechanical waves in hyperbolic thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 2001, 24: 121-140
- 9 Prevost JH, Tao D. Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50: 817-822
- 10 Wu WH, Li XK. Application of the time discontinuous Galerkin finite element method to heat wave simulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49 (9-10): 1679-1684

(责任编辑: 刘希国)

TIME DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD FOR GENERALIZED THERMO-ELASTIC WAVE OF NON-FOURIER EFFECTS¹⁾

Guo Pan* Wu Wenhua^{*,2)} Wu Zhigang[†]

^{*}(The State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

[†](The State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, School of Aeronautics and Astronautics, Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract In the paper, we present a modified time discontinuous Galerkin finite element method (DGFEM) for the solution of generalized thermo-elastic coupled problems based on well-known non-Fourier Lord-Shulman theory. The general temperature and displacement fields with their time derivatives are interpolated in time domain, respectively. In order to filter out the spurious wave-front oscillations, an artificial damping scheme is implemented in the final finite element formula. Numerical results show that the present modified DGFEM proposes the good abilities and provides much more accurate solutions for generalized thermo-elastic coupled behavior. It can effectively capture the discontinuities at the wave front and filter out the effects of spurious numerical oscillation induced by thermal shock.

Key words generalized thermo-elastic theory, DGFEM, thermal shock, numerical oscillation

Received 6 December 2012, revised 26 February 2013.

1) The project was supported by the National Basic Research Program of China (2011CB013705), National Science and Technology Major Project of the Ministry of Science and Technology of China (2011ZX05026-002-02) and Innovation Research Group Research Fund (50921001).

2) Wu Wenhua, associate professor, research interests: computational mechanics. E-mail: lxyuhua@dlut.edu.cn