第 45 卷 第 2 期　力 学 学 报　Vol. 45，No. 2
2013 年 3 月　Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics　Mar.，2013

研究论文

连续小推力作用下的共线平动点 1)

侯锡云 *,†,2)　刘 林 *,†

*(南京大学天文与空间科学学院，南京 210093)

†(南京大学空间环境与航天动力学研究所，南京 210093)

摘要　研究了圆型限制性三体问题的平动点在连续小推力作用下的具体位置和动力学特征的变化. 研究表明，随着小推力方向在空间中的变化，平动点的具体位置也会发生相应的变化，文章详细阐述了这些变化的特征. 针对航天任务中应用较多的共线平动点 L1 和 L2，研究了其附近运动的稳定性状态，给出了线性条件稳定解，并在此基础上，构造了条件稳定解的高阶形式，将其结果与数值积分轨道进行了比对，两者符合得很好. 最后，进一步研究了共线平动点附近周期轨道族的演化状态，由于连续小推力引入的非对称性，周期轨道族会发生分岔现象.

关键词　圆型限制性三体问题, 平动点, 周期轨道

中图分类号：V448.2　　**文献标识码**：A　　DOI：10.6052/0459-1879-12-191

引 言

毫无疑问，限制性三体问题的共线平动点是当今航天任务的热点区域之一. 自从第 1 颗此类的探测器在 1978 年成功发射之后，已有十多颗探测器到达过或定点在这些点附近 [1-2]，并且还有多颗即将发射到这些点的探测器. 这些任务中，除 ARTEMIS[3] 和 GRAIL[4] 任务造访过地–月系的共线平动点之外，其他都是涉及日–地系共线平动点的任务 (准确地说，是日–地 + 月系，其中 “地 + 月” 表示地月质心). 值得一提的是我国的嫦娥 II 号探测器，在其月球探测任务结束后的扩展任务中飞到了日–地系的 L2 点 [5]，成为我国的第 1 颗共线平动点探测器，也是世界上首颗从环月轨道飞向日–地共线平动点的探测器. 目前该探测器正在进行第 2 次任务拓展，有望成为我国的第 1 颗小行星探测器.

共线平动点附近运动的动力学特征是所有这些应用的基础，就单纯的圆型限制性三体问题而言，已经被研究得比较透彻 [5-8]，国内也有很多学者进行了相关的理论和应用研究 [9-11]. 但小推力技术 (包括太阳帆) 的发展为该领域注入了新的活力与挑战. 关于共线平动点附近小推力技术的应用研究有许多，这些工作 [12-17] 大多是关于太阳帆或实际小推力在轨道设计与控制中的应用研究，关于共线平动点自身在连续小推力作用下的动力学特征研究并不多见. 但如前所述，这些动力学特征的变化是具体航天任务应用的基础，而随着小推力和太阳帆技术的飞速发展，各类应用也逐渐被提上日程 [18-19]. 关于共线平动点在太阳帆作用下动力学特征的变化，已有相关工作 [17]，而本文则研究共线平动点在连续小推力作用下动力学特征的变化.

以日 – 地系为例，本文研究了共线平动点在连续小推力作用下的动力学特征. 在会合坐标系下，对大小与方向固定的小推力而言，平动点通常仍旧存在，只是相对无小推力的情形有所偏移. 变动小推力的方向，平动点也会相应地变动. 具体而言，L1 点与 L2 点的集合在空间中呈椭球状分布，而 L3 点的集合在空间中呈香蕉状分布. 当小推力增大到一定程度时，L3 点的集合可能与三角平动点的集合发生重叠. 针对 L1 点和 L2 点，研究了其附近运动的稳定性，并构造了高阶分析解. 由于小推力引入的不对称性，分析解的形式与无小推力的情形不同. 最后，研究了共线平动点附近的周期轨道族的演化情形. 同样，由于小推力引入的不对称性，周期轨道族会发生有趣的分岔现象.

需要说明的是，文中所说的小推力实际是指很小的加速度. 因此，具体的推力大小依赖于探测器的质量. 如果探测器的质量很大，实际的推力也可能很

2012–07–04 收到第 1 稿，2012–09–16 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金 (10903002), 教育部新世纪优秀人才基金 (NCET-11-0223) 和国家高技术研究发展计划 (2012AA121602) 资助项目.
2) 侯锡云，副教授，主要研究方向：动力天文与轨道力学. E-mail：silence@nju.edu.cn

大.

另外，为方便研究，假定了推进器的比冲为无穷大，这当然有悖事实，但作为初步研究，这里认为是可以的.

1 平动点

在连续小推力作用下，探测器的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + 2(-\dot{y}, \dot{x}, 0)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{1}$$

其中，Ω 为连续小推力

$$\Omega = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 + \mu(1-\mu)] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_1} + u_x x + u_y y + u_z z \tag{2}$$

$u_x = u\cos\beta\cos\alpha$, $u_y = u\cos\beta\sin\alpha$, $u_z = u\sin\beta$, α, β 是会合坐标系下表示小推力方向的两个球面角，u 表示小推力的大小 (实际是小推力产生的加速度，单位为 m/s^2). 与无小推力情形一样 [6]，式 (1) 所采用的质量量纲 $[M]$ 为 2 个中心天体的质量之和，长度量纲 $[L]$ 为 2 个中心天体的平均距离，时间量纲为

$$[T] = \sqrt{[L]^3/G[M]}$$

相应的加速度量纲为

$$[a] = G[M]/[L]^2$$

以日–地系为例，$u = 1$ 实际表示小推力产生的加速度为 5.93 mm/s^2.

式 (1) 所表示的系统仍旧为 Hamilton 系统，Jacobi 积分也继续存在，形式为

$$2\Omega - v^2 = 2\Omega - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = C \tag{3}$$

其中 C 称为 Jacobi 常数. 平动点可由条件 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ 得到，但由于小推力的引入，其位置相对无小推力时的位置发生了偏移，并且对同样大小的小推力，不同的方向也会给出不同的平动点，当小推力的方向角在整个球面空间旋转时，可以给出平动点的集合，通常为空间中的一连续曲面. 图 1(a) 图给出了 $\beta = 0, \alpha \in [0, 2\pi)$ 时 L1 点的集合，图 1(b) 给出了 $\alpha = 0, \beta \in [0, 2\pi)$ 时 L1 点的集合，小推力的大小设定为 $u = 0.000\,1$. 两图都对应日–地系统，图中 “*” 标记的点表示无小推力时共线平动点 L1 的位置. 图 1 以及下面所有轨迹图中，坐标单位 “adim” 表示日地平均距离. 由这两幅图不难得出这样的结论: 当

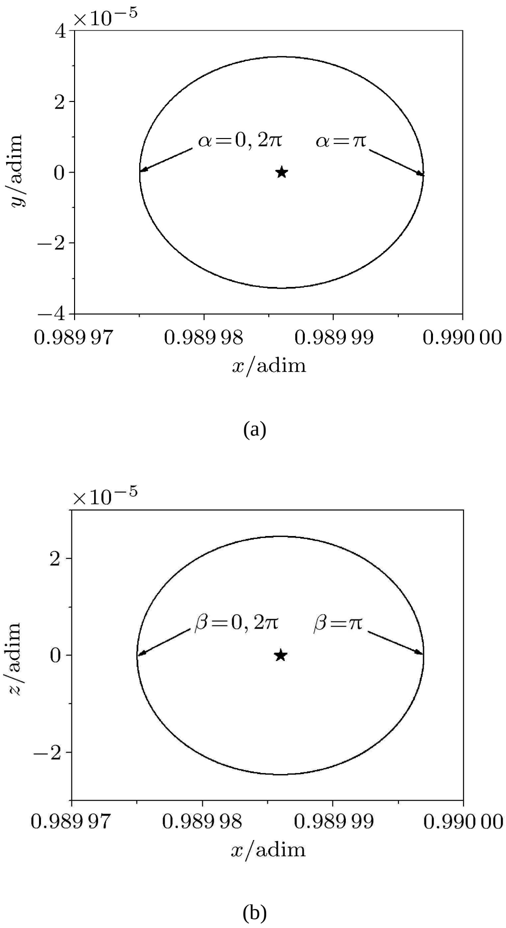


图 1 共线平动点 L1 的集合与 x–y 平面的相交曲线 (a) 以及与 x–z 平面的相交曲线 (b) ($u = 0.000\,1$)

Fig. 1 The intersection curves of the set of the point L1 with the x–y plane (a) and the x–z plane (b) ($u = 0.0001$)

α 在 $[0, 2\pi)$，β 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 之间变化时，L1 点的集合在空间中成椭球状分布. 对 L2 点，有类似的结论，这里不再给出计算细节.

共线平动点 L3 与 L1 和 L2 点不同. 由于日–地系的质量参数 μ 太小，不能分辨其中的细节，因此针对 $\mu = 0.01$ 的限制性三体系统作了计算，图 2 ~ 图 6 的结果都对应此质量参数. 图 2(a) 给出了 $\beta = 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ 时 L3 点的集合，图 2(b) 给出了 $\alpha = 0$, $\beta \in [0, 2\pi)$ 时 L3 点的集合，小推力大小为 $u = 0.001$. 显然，当 α 在 $[0, 2\pi)$，β 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 之间变化时，L3 点的集合在空间中会画出一个香蕉的形状. 为直观显示，图 3 给出了其三维空间图像. 对日–地系这样的小质量参数系统而言，“香蕉” 太窄，因此采用 $\mu = 0.01$ 给出相应结果.

图 4 给出了三角平动点 L4 的集合，同样，图 4(a) 对应 $\beta = 0, \alpha \in [0, 2\pi)$，图 4(b) 对应 $\alpha = 0, \beta \in [0, 2\pi)$.

另一个三角平动的集合与 L4 点关于 x–z 平面对称. 当 α 在 $[0,2\pi)$，β 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 之间变化时，与 L3 点类似，三角平动点的集合在空间中也描绘出一香蕉形状，这里不再给出具体三维图像. 当小推力增大时，共线平动点 L3 与 2 个三角平动点的集合在空间中会逐渐靠近，如图 5 所示. 该图中，图 5(a) 对

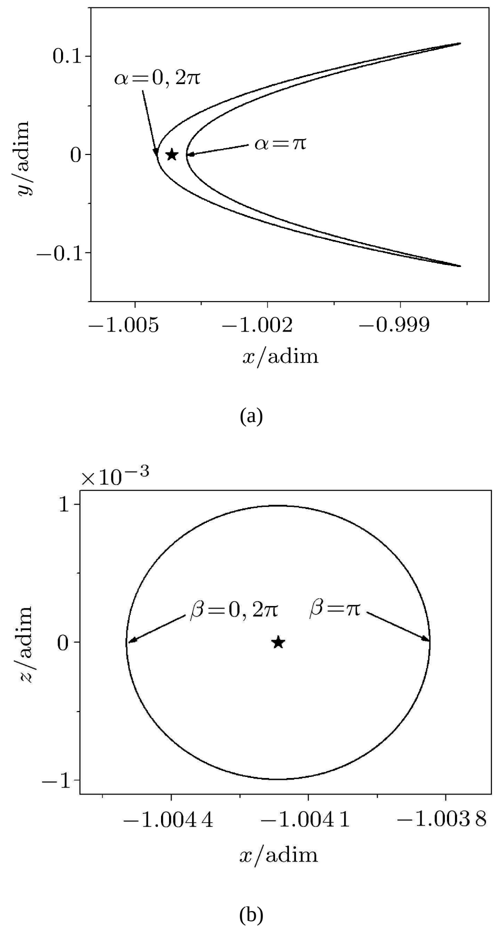


图 2 共线平动点 L3 的集合与 x–y 平面的相交曲线 (a) 以及与 x–z 平面的相交曲线 (b) (u = 0.001)

Fig. 2 The intersection curves of the set of the point L3 with the x–y plane (a) and the x–z plane (b) (u = 0.001)

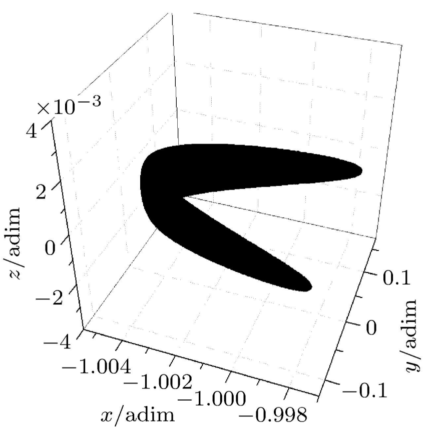


图 3 共线平动点 L3 的集合在空间中的图像 (u = 0.001)

Fig. 3 The set of the point L3 in space (u = 0.001)

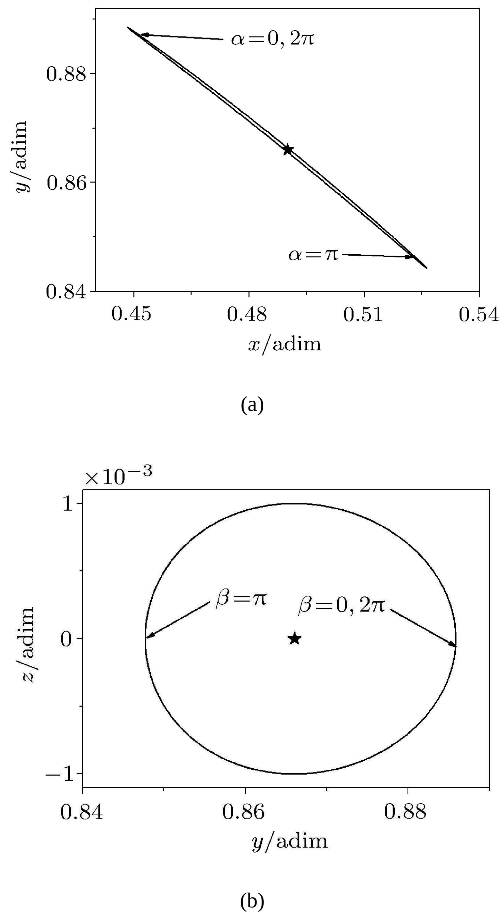
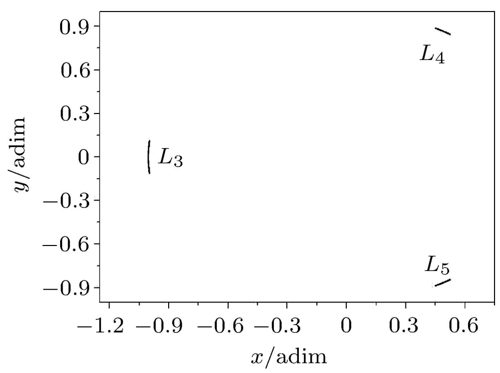


图 4 三角平动点 L4 的集合与 x–y 平面的相交曲线 (a) 以及与 x–z 平面的相交曲线 (b) (u = 0.001)

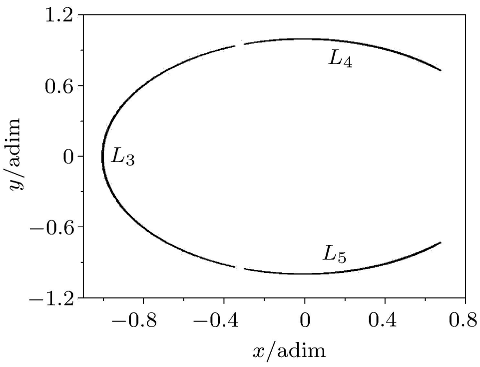
Fig. 4 The intersection curves of the set of the point L4 with the x–y plane (a) and the x–z plane (b) (u = 0.001)



(a) u = 0.001

图 5 平动点 L3, L4 和 L5 的集合与 x–y 平面的相交曲线

Fig. 5 The intersection curves of the sets of the points L3, L4 and L5

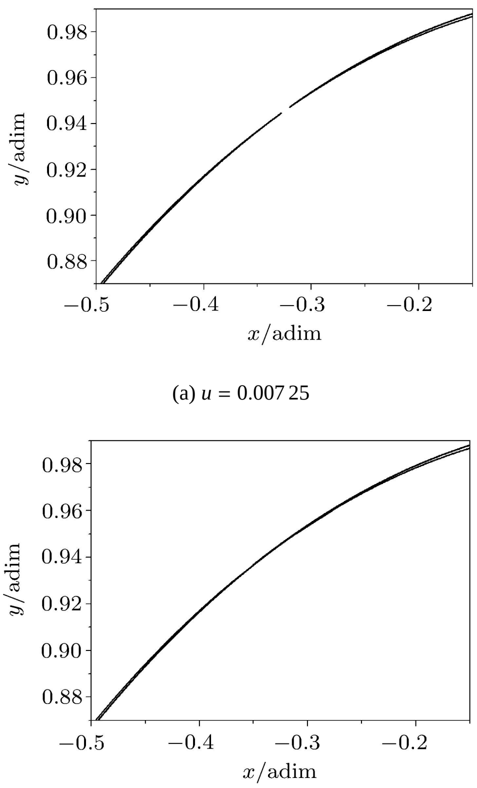


(b) $u = 0.007\,25$

图 5 平动点 L3, L4 和 L5 的集合与 x–y 平面的相交曲线 (续)

Fig. 5 The intersection curves of the sets of the points L3, L4 and L5 (continued)

应 $u = 0.001$，图 5(b) 对应 $u = 0.007\,25$，随着小推力的逐渐增大，L3，L4 和 L5 点的集合范围逐渐增大并相互靠拢. 当小推力增大到某个临界值时 (对 $\mu = 0.01$ 的限制性三体系统而言，该值在 0.007 25 与 0.007 26 之间)，L3 点的集合与 L4, L5 点的集合相交. 以 L3 点的集合与 L4 点的集合相交为例，图 6 给出了



(b) $u = 0.007\,26$

图 6 平动点 L3, L4 的集合在临界小推力附近的演化细节

Fig. 6 The details of the sets of the points L3 and L4 around the critical value of the low thrust

这些集合在临界值附近的演化情形，图 6(a) 对应 $u = 0.007\,254\,3$ 的局部放大，图 6(b) 对应 $u = 0.007\,26$ 的局部放大.

2 线性化模型

记探测器相对平动点的位置偏移为 $(\xi, \eta, \zeta)^{\mathrm{T}}$，线性化的运动方程形式为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \ddot{\zeta} &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中, $a_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3)$ 可由式 (1) 简单得到. 记该系统的特征值为 λ，由于 $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$，特征值满足方程

$$\begin{aligned} f(\lambda) = {} & \lambda^6 + (4 - a_{11} - a_{22} - a_{33})\lambda^4 + \\ & (a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - \\ & a_{12}^2 - a_{13}^2 - 4a_{33})\lambda^2 + \\ & (a_{12}^2 a_{33} + a_{13}^2 a_{22} + a_{23}^2 a_{11} - \\ & a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23}) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

特征值将成对出现，这也是 Hamilton 系统所要求的. 记 $s = \lambda^2$，当小推力较小时，曲线 $y = f(\lambda) = g(s)$ 的大致形状如图 7 所示.

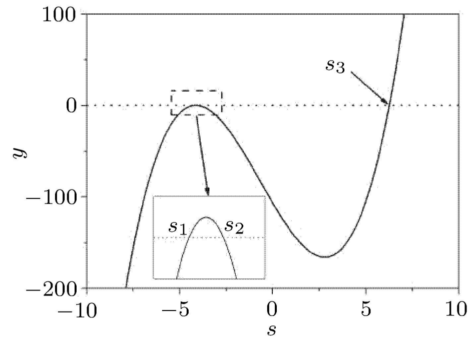


图 7 式 (5) 表示的曲线的大致形状 ($s = \lambda^2$)

Fig. 7 The shape of the curve expressed by Eq.(5) where $s = \lambda^2$

特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{-s_1}$ 和 $\lambda_{3,4} = \pm\mathrm{i}\sqrt{-s_2}$ 对应共线平动点附近的条件稳定运动分量，而特征根 $\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{s_3}$ 对应不稳定的运动分量. 式 (5) 可以用来研究不同 α, β 和 u 时共线平动点的稳定性变化情形. 这里不再给出细节，仅给出结论：当小推力较小时，与无小推力的情形相比共线平动点稳定性特征并不会发生变化.

在下面的章节中，将针对 L1 点和 L2 点进行研究. 与无小推力的情形不同，线性化模型下 x, y 平面内的运动与 z 方向的运动并不分离，线性化解的形式为

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \gamma_1\cos\theta_1 + a_2\gamma_2\cos\theta_2 + b_2\gamma_2\sin\theta_2\\ &\eta = a_1\gamma_1\cos\theta_1 + b_1\gamma_1\sin\theta_1 + c_2\gamma_2\cos\theta_2 +\\ &\qquad d_2\gamma_2\sin\theta_2\\ &\zeta = \gamma_2\cos\theta_2 + c_1\gamma_1\cos\theta_1 + d_1\gamma_1\sin\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$\theta_1 = \theta_{10} + \omega_0 t, \quad \theta_2 = \theta_{20} + v_0 t \tag{7}$$

γ_1, γ_2 表示 x, y 平面内与 z 方向的运动振幅，θ_{10}, θ_{20} 表示幅角的初始相位，ω_0, v_0 是 2 个本证频率，系数 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 的表达式请参见附录.

3 高阶近似解

一般而言，线性解不够精确，给出的解在完整力模型下很快会发散，下面将构造高阶解. 由于连续小推力破坏了系统原来的对称性，高阶解的形式与无小推力的情形不同 [8]，其具体形式为

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sum \gamma_1^i\gamma_2^j\left(\xi_{ijkm}^c\cos\theta_{km} + \xi_{ijkm}^s\sin\theta_{km}\right)\\ \eta &= \sum \gamma_1^i\gamma_2^j\left(\eta_{ijkm}^c\cos\theta_{km} + \eta_{ijkm}^s\sin\theta_{km}\right)\\ \zeta &= \sum \gamma_1^i\gamma_2^j\left(\zeta_{ijkm}^c\cos\theta_{km} + \zeta_{ijkm}^s\sin\theta_{km}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \theta_{km} &= k\theta_1 + m\theta_2\\ \theta_1 &= \theta_{10} + \omega t\\ \theta_2 &= \theta_{20} + v t \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中，$i, j \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant i$, $-j \leqslant m \leqslant j$. $N = i + j$ 表示分析解的阶数. k, m 和 i, j 有相同的奇偶性. γ_1, γ_2 和 θ_{10}, θ_{20} 的意义同式 (6) 和式 (7)，但是由于非线性项的影响，频率 ω, v 不再等于 ω_0, v_0，而需展开成如下形式

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \sum_{i,j\geqslant 0}\omega_{ij}\gamma_1^i\gamma_2^j\\ v &= v_0 + \sum_{i,j\geqslant 0} v_{ij}\gamma_1^i\gamma_2^j \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中，i, j 为偶数.

共线平动点附近运动方程的高阶展开形式为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta =\\ &\qquad -(1-\mu)[(x+\mu)r_1^3]_{\geqslant 2} -\\ &\qquad \mu[(x-1+\mu)/r_2^3]_{\geqslant 2}\\ &\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta =\\ &\qquad -(1-\mu)[y/r_1^3]_{\geqslant 2} - \mu[y/r_2^3]_{\geqslant 2}\\ &\ddot{\zeta} - a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta =\\ &\qquad -(1-\mu)[z/r_1^3]_{\geqslant 2} - \mu[z/r_2^3]_{\geqslant 2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

下标 $\geqslant 2$ 表示大于一阶的项. 以 ξ 为例，上式中的求导可由如下公式求得

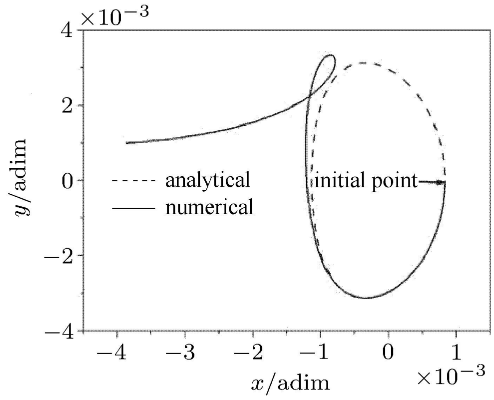
$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= \omega\frac{\partial\xi}{\partial\theta_1} + v\frac{\partial\xi}{\partial\theta_2}\\ \ddot{\xi} &= \omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta_1^2} + 2\omega v\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将式 (8) 和式 (10) 代入到式 (12). 类似无小推力的情形 [8]，将已知的直到 $N-1$ 阶的解代入，可以得到 N 阶系数. 这里不给出分析解的构造细节，仅给出结果. 表 1 给出了直到 3 阶的频率修正系数，小推力 $u = 0.000\,1$，方向角 $\alpha = 60°, \beta = 30°$. 图 8 以 L2 点为例，给出了分析解 (虚线) 与数值积分轨道 (实线) 的比对结果，数值积分轨道的初始值由分析解提供. 图 8(a) 对应 3 阶分析解的结果，图 8(b) 对应 15 阶分析解的结果. $\gamma_1 = 0.001, \gamma_2 = 0.001, \theta_{10} = 0, \theta_{20} = 0$. 仅给出了 x–y 平面内的比对结果. 显然，高阶分析解能更好地描述运动.

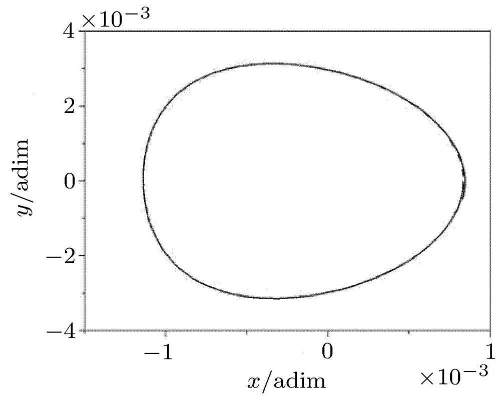
表 1 直到 3 阶的频率修正系数

Table 1 Coefficients of the frequencies till the order 3

i, j	ω_{ij}(L1)	v_{ij}(L1)	ω_{ij}(L2)	v_{ij}(L2)
0, 0	2.085	2.014	2.058	1.986
2, 0	−17 137.301	2 173.646	−15 080.667	2 897.922
0, 2	252.261	−1 627.315	346.613	−1 450.893



(a)



(b)

图 8 分析解与数值积分轨道的比对

Fig. 8 Comparison results between the analytical formulae and the numerical orbit

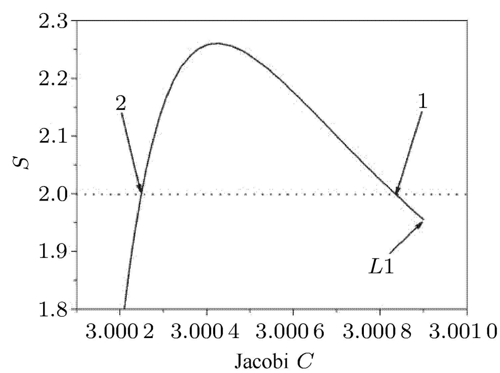
4 周期轨道族

根据 Lyapunov 定理，当 ω_0, v_0 不通约时，存在两族周期轨道族. 当小推力不是很大时，动力学特征不会偏离无摄情形很远，因此仍旧称这两族轨道为平面 Lyapunov 周期轨道族与垂直 Lyapunov 周期轨道族，尽管平面 Lyapunov 周期轨道已经不限制在 x-y 平面内.

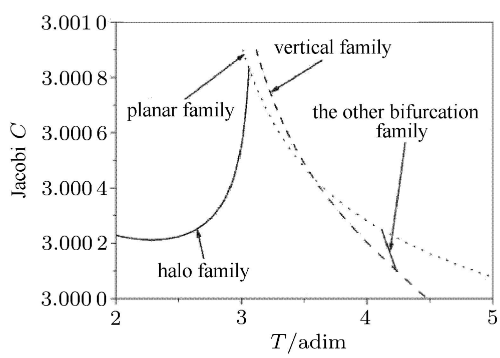
在给出具体的小推力结果之前，简单介绍一下无摄情形下的结果. 对共线平动点而言，平面和垂直 Lyapunov 周期轨道族都终结于一条绕转 2 圈的平面轨道 [20]. 在计算平面 Lyapunov 周期轨道时会遇到和主天体相撞的轨道，因此仅给出碰撞轨道之前的结果. 图 9(a) 以 L1 点为例，给出了平面 Lyapunov 周期轨道族的垂直稳定参数曲线. 平动点 L2 和 L3 与 L1 点有类似的形状. 图中 s 表示垂直稳定参数，与图 7 中的意义不同，它的计算方法可见文献 [21]，不再详叙.

从图中标记为 “1” 的临界轨道分岔出著名的晕轨道族. 事实上，晕轨道族存在 2 个分支，这 2 个分支的轨道关于 x–y 平面对称. 从标记为 “2” 的临界轨道分岔出另一条周期轨道，它也有 2 个分支，并且这两个分支的轨道同时关于 x–y 平面和 x– z 平面对称 [22]. 该族轨道的 2 个分支都终结于同一条平面 Lyapunov 轨道. 图 9(b) 给出了 Lyapunov 周期轨道族和分岔周期轨道族的部分 T–C(周期相对 Jacobi 常数) 曲线. 由于分岔轨道族 2 个分支的对称性，它们的 T–C 曲线在图中重合. 图 10 给出了图 9 中标记为 “the other bifurcation family” 的分岔轨道族其中一个分支的一条示例轨道.

小推力的引入破坏了系统原有的对称性，图 11 给出了这些对称性破坏的细节，小推力 $u = 0.000\,1$，方向角 $\alpha = 60°, \beta = 30°$. 图 11(a) 给出了原晕轨道的 2 个分支的分岔细节. 由于小推力的存在，原晕轨道



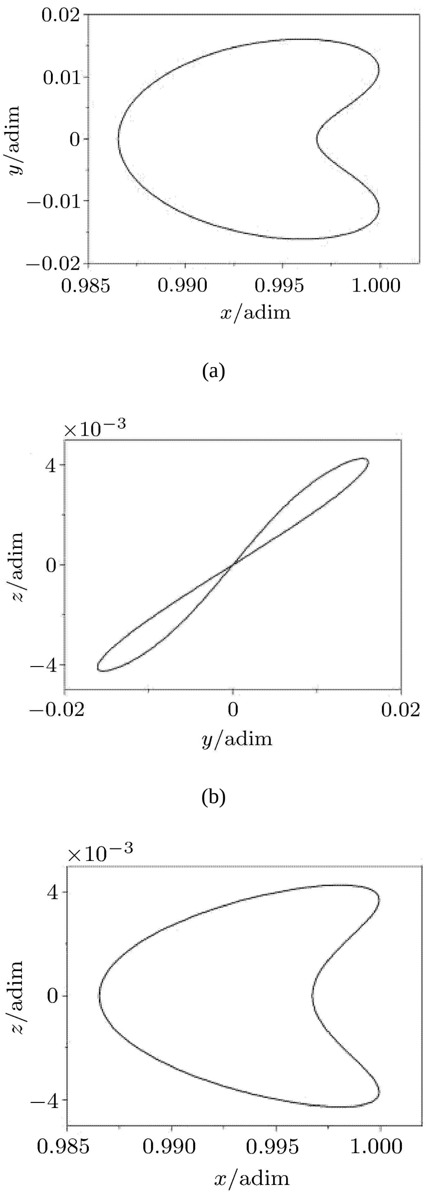
(a)



(b)

图 9 (a) 日–地系 L1 点附近平面 Lyapunov 周期轨道族的垂直稳定参数曲线, (b) Lyapunov 周期轨道族和分叉周期轨道族的 T–C 曲线

Fig. 9 (a) The vertical stability curve of the planar Lyapunov family around the point L1 in the Sun–Earth system; (b) The T–C curves of the Lyapunov families and the bifurcation families



(a)

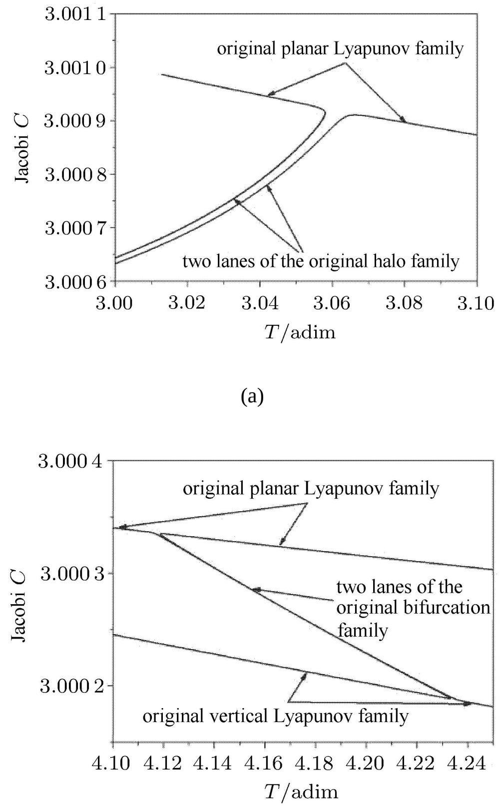
(b)

(c)

图 10 图 9 中标记为 “the other bifurcation family” 的其中一条分支的一条示例轨道

Fig. 10 One example orbit in one branch of the bifurcation family denoted as “the other bifurcation family” in Fig.9

的 2 个分支的 T–C 曲线在图中不再重合，原晕轨道的一条分支与原平面 Lyapunov 周期轨道族的部分相连形成新的平面 Lyapunov 周期轨道族，另一条分支则与原平面 Lyapunov 周期轨道族的部分相连形成一新的周期轨道族，该现象已在文献 [17] 中针对太阳帆研究时指出过. 图 11(b) 给出了图 9 中标记为 “the other bifurcation family” 的 2 个分支的破裂情形. 一条分支与平面 Lyapunov 周期轨道族的部分以及垂直 Lyapunov 周期轨道族的部分形成新的垂直 Lyapunov



(a)

(b)

图 11 Lyapunov 周期轨道族、晕轨道族和另一分叉周期轨道族在小推力作用下的分叉情形

Fig. 11 Bifurcation details of the Lyapunov families, the halo family and the other bifurcation familiy

周期轨道族，另一条分支与两 Lyapunov 周期轨道族的剩余部分形成一新的周期轨道族.

对 L2 点，有完全类似的现象，这里不再给出细节. 需指出的是，如果假定小推力的方向角 $\beta = 0$，则没有关于 x–y 平面的不对称性被引入，因此图 11(a) 所示的分岔现象不会发生. 如果假定 $\alpha = 0$，则没有关于 x–z 平面的不对称性被引入，图 11(b) 所示的分岔现象不会发生.

5 结 论

本文首先给出了日 – 地系统共线平动点在恒定连续小推力作用下的变化情形. 对恒定大小的小推力，平动点的具体位置会随着小推力的方向改变而改变. 其次，针对共线平动点 L1 和 L2，将运动方程在这些点附近展开并保留线性项，简单分析了这些点附近运动的稳定性. 研究表明，当小推力较小时，共线平动点附近运动的稳定性与无小推力情形类似：

不稳定但条件稳定. 之后，通过将运动方程展开至高阶项，借助计算机构造了高阶分析解，并将这些分析解与数值结果进行了比对，结果表明，高阶分析解的发散速度相对线性解而言明显降低. 这些分析解在具体的工程应用时可以作为探测器的目标轨道，或者作为数值迭代方法给出的目标轨道的很好的初始迭代值 [6-7]，因此有一定的意义. 最后，研究了限制性三体问题的周期轨道族的对称性在非对称的连续小推力作用下的破坏情形.

参 考 文 献

1 Dunham DW, Farquhar RW. Libration point missions, 1978-2002. In: Gómez G, Lo MW, Masdemont JJ, eds. Proceedings of the Conference on Libration Point Orbits and Applications, Singapore: World Scientific, 2003. 45-73

2 Farquhar RW, Dunharn DW, Guo Y, et al. Utilization of libration points for human explorations in the sun-earth- moon system and beyond. *Acta Astronautica*, 2004, 55 (3-9): 687-700

3 Broschart SB, Chung MJ, Hatch SJ, et al. Preliminary trajectory design for the Artemis Lunar Mission, AAS 09- 382, Astrodynamics Specialist Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2009

4 Hoffman TL. GRAIL: Gravity Mapping the Moon. In: Proceedings of the 2009 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, USA, March 7-14, 2009, 1-7: 293-300

5 吴伟仁，崔平远，乔栋等. 嫦娥二号日地拉格朗日 L2 点探测轨道设计与实施. 科学通报，2012，57：1987-1991 (Wu Weiren, Cui Pingyuan, Qiao Dong, et al. Design and performance of exploring trajectory to Sun-Earth L2 point for Chang'E-2 mission. *Chin Sci Bull*, 2012, 57: 1987-1991 (in Chinese))

6 Gómez G, Llibre J, Martínez R, et al. Dynamics and Mission Design near Libration Point Orbits, Vol. I, Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points. Singapore: World Scientific, 2001

7 Gómez G, Llibre J, Martínez R, et al. Dynamics and Mission Design near Libration Point Orbits, Vol. III, Advanced Methods for Collinear Points. Singapore: World Scientific, 2001

8 Jorba A, Masdemond J. Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three-body problem. *Physica D*, 1999, 132: 189-213

9 赵军，蔡志勤，齐朝晖. 基于平动点轨道的绳系卫星编队重构仿真. 系统仿真学报，2011，23(12)：2805-2811 (Zhao Jun, Cai Zhiqin, Qi Zhaohui. Simulation of reconfiguration of tethered satellite formations in libration point orbits. *Journal of System Simulation*, 2011, 23(12): 2805-2811 (in Chinese))

10 张汉清，李言俊，张科. 一种新的共线平动点拟周期轨道稳定保持策略. 宇航学报，2012，33(3)：318-324 (Zhang Haiqing, Li Yanjun, Zhang Ke. A novel station-keeping strategy for quasi-periodic orbits in the vicinity of collinear libration points. *Journal of Astronautics*, 2012, 33(3): 318-324 (in Chinese))

11 Chen Y, Baoyin H, Li JF. Trajectory design for the moon departure libration point mission in full ephemeris model. *Science China Technological Sciences*, 2011, 54: 2924-2934

12 Baoyin H, McInnes CR. Solar sail halo orbits at the sun-earth artificial L1 point. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, 94: 155-171

13 Simo J, McInnes CR. Solar sail trajectories at the Earth-Moon Lagrange Points. In: Proc. of 59th International Astronautical Congress (IAC'08), Glasgow, Scotland, 2008

14 Simo J, McInnes CR. Designing displaced lunar orbits using low-thrust Propulsion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2010, 33: 259-265

15 Farrés A, Jorba À. Solar sail surfing along families of equilibrium points. *Acta Astronautica*, 2008, 63: 249-257

16 Farrés A, Jorba À. Dynamics of a solar sail near a halo orbit. *Acta Astronautica*, 2010, 67: 979-990

17 Farrés A, Jorba À. Periodic and quasi-periodic motions of a solar sail close to sl1 in the earth-sun system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2010, 107: 233-253

18 McInnes CR. Artificial lagrange points for a partially reflecting flat solar sail. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1999, 22: 185-187

19 Baig S, McInnes CR. Artificial halo orbits for low-thrust propulsion Spacecraft. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2009, 104: 321-335

20 Hou XY, Liu L. On lyapunov families around collinear libration points. *The Astronomical Journal*, 2009, 137: 4577-4585

21 Hénon M. Vertical stability of periodic orbits in the restricted Problem. *Celestial Mechanics*, 1973, 8: 269-272

22 Mondelo JM. Contribution to the study of fourier methods for quasi-periodical functions and the vicinity of the collinear libration points. [PhD Thesis]. Barcelona, Spain: Universitat de Barcelona, 2001

(责任编辑: 周冬冬)

附 录

线性化模型下条件稳定解式 (6) 中的系数公式

$$a_1 = \frac{\left(\omega_0^2 + a_{33}\right) a_{12} - a_{13} a_{23}}{a_{23}^2 - \left(\omega_0^2 + a_{22}\right)\left(\omega_0^2 + a_{33}\right)}$$

$$b_1 = \frac{2\left(\omega_0^2 + a_{33}\right)\omega_0}{a_{23}^2 - \left(\omega_0^2 + a_{22}\right)\left(\omega_0^2 + a_{33}\right)}$$

$$c_1 = \frac{\left(\omega_0^2 + a_{22}\right) a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{23}^2 - \left(\omega_0^2 + a_{22}\right)\left(\omega_0^2 + a_{33}\right)}$$

$$d_1 = -\frac{2 a_{23}\omega_0}{a_{23}^2 - \left(\omega_0^2 + a_{22}\right)\left(\omega_0^2 + a_{33}\right)}$$

$$a_2 = -\frac{\left[a_{12} a_{23} - a_{13}\left(v_0^2 + a_{22}\right)\right]\left(v_0^2 + a_{33}\right)}{2 a_{12} a_{13} a_{23} - a_{13}^2\left(v_0^2 + a_{22}\right) - a_{23}^2\left(v_0^2 + a_{11}\right)}$$

$$b_2 = -\frac{2 a_{23} v_0 c_2}{a_{12} a_{13} - a_{23}\left(v_0^2 + a_{11}\right)}$$

$$c_2 = -\frac{\left[a_{12} a_{13} - a_{23}\left(v_0^2 + a_{11}\right)\right]\left(v_0^2 + a_{33}\right)}{2 a_{12} a_{13} a_{23} - a_{13}^2\left(v_0^2 + a_{22}\right) - a_{23}^2\left(v_0^2 + a_{11}\right)}$$

$$d_2 = \frac{2 a_{13} v_0 c_2}{a_{12} a_{13} - a_{23}\left(v_0^2 + a_{11}\right)}$$

COLLINEAR LIBRATION POINTS WITH CONTINUOUS LOW THRUST [1)]

Hou Xiyun[*,†,2)] Liu Lin[*,†]

[*](*School of Astronomy and Space Science*，*Nanjing University*，*Nanjing* 210093，*China*)

[†](*Institute of Space Environment and Astrodynamics*，*Nanjing University*，*Nanjing* 210093，*China*)

Abstract Collinear libration points of the restricted three-body problem with constant low thrust are studied. Varying the direction of the low thrust, the positions of the collinear libration points vary correspondingly. The set of the point L1 or L2 forms the shape of an elliptical “sphere” in space while the set of the point L3 forms the shape of a “banana”. The triangular libration points are also studied to show how they are connected with the collinear libration point L3. Concentrating on the points L1 and L2, linear solutions of the motions around them are obtained. Due to the asymmetry introduced by the low thrust, the linear solution has a form different from that of the unperturbed case. High order analytical solutions are also constructed. These solutions are compared with numerically integrated orbits. The comparison shows good agreement with each other. At last, periodic families around these two points are studied. These families include the planar and the vertical Lyapunov families, the halo family and another special periodic family. Bifurcation phenomena of these families are described.

Key words circular restricted three-body problem, libration point, periodic orbit

Received 4 July 2012, revised 16 September 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10903002), New Century Excellent Talents in University (NCET-11-0223) and the National High Technology Research and Development Program of China (2012AA121602).

2) Hou Xiyun, associate professor, research interests: dynamical astronomy and orbit dynamics. E-mail：silence@nju.edu.cn