

下限问题中新的莫尔-库仑屈服面线性化方法¹⁾

李春光²⁾ 朱宇飞 刘丰 邓琴 郑宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所, 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘要 相比极限平衡法, 基于下限原理的极限分析法具有更严谨的力学基础, 且得到的安全系数偏于安全, 更具有实用价值. 尽管很多学者对其进行了有益的研究, 然而经典的线性化方法不能解决一般的强度各向异性问题. 在方位角离散化的基础上, 建立各离散方位平面上的屈服条件, 同时引入伪黏聚力以保证其具有下限性质. 算例表明, 该方法可以稳定地从极限解的下方收敛. 该方法不仅丰富了基于线性规划模型的下限有限元理论, 而且为材料各向异性本构问题的计算打下了理论基础.

关键词 下限分析, 伪黏聚力, 线性规划, 方位离散

中图分类号: O344.5 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-187

引言

极限分析的下限理论由 Drucker 等^[1]于 1951 提出, 1975 年 Chen^[2]发表专著《极限分析和土的塑性力学》, 阐明了极限分析理论在土工问题中的应用, 随后就成为计算各种土工问题承载力及稳定性的强大工具. 相比于极限平衡法, 基于下限原理的极限分析法具有更严谨的力学基础, 且得到的安全系数偏于安全, 更具有实用价值. Yu 等^[3]探讨了极限分析与极限平衡法之间的关系, 他们的算例表明: 有时极限平衡法计算得到的安全系数与真实值相差高达 35%, 假设的存在有时会对结果产生很大的影响.

由于下限问题中静力许可应力场难以构造阻碍了它在工程中的应用. 直至 1970 年 Lysmer^[4]将有限元思想和线性规划理论引入下限问题, 首次把三角形单元用于分析平面应变问题, 并提出了用内接正多边形替代 Mohr-Coulomb 屈服面作为强度条件的概念, 从而成功解决了应力场问题, 得出严格下限解^[4]. Sloan^[5]基于最速下降积极集法, 分析了地基承载力问题. 限于当时计算机技术发展水平, 求解的规模十分有限. 此后, 随着计算机的发展, 下限法进入了快速发展时期, 李国英等^[6]详细介绍了下限原理有限元法并讨论了边坡稳定安全系数和超载系数的关系及其解法; 在非线形算法方面, 杨洪杰等^[7]采用序列二次规划算法求解了矩形表面基础的承载

力问题; 黄齐武^[8]通过引入 2 阶锥形规划理论, 利用原-对偶预测-校正算法有效地求解了极限分析问题; 此外, 陈炜等^[9]还将极限分析用于块体单元分析岩石边坡的稳定性, 杨小礼等^[10]基于非线性 Hoek-Brown 破坏准则建立岩石极限分析非线性理论, 并进行了上下限的分析.

对于强度各向异性的材料, Yu 等^[11]曾对黏聚力 $c_\theta = c_h + (c_v - c_h) \sin^2 \theta$ 的各向异性材料进行了下限的求解, 这里 c_h 和 c_v 分别指水平和竖向的黏聚力, θ 指黏聚力 c_θ 所在的平面与水平面的夹角, 但该方法仅能对这种类型的材料进行求解, 而对较为复杂的材料本构则无能为力. 为此, 本文对于任意应力点, 从空间方位出发, 建立各离散方位上的屈服条件, 从而实现 Mohr-Coulomb 屈服准则的线性化, 为各向异性材料的极限分析打下基础.

1 下限定理

将所求区域 V 内满足静力平衡条件和屈服条件, 并在及其应力边界 S_T 上满足应力边界条件的应力场 σ_{ij} 称为静力许可应力场.

受力体内存在无数个静力许可应力场, 但所有与静力许可应力场对应的外载荷一定不大于真实的极限载荷, 因为外载荷位于极限解的下侧, 故称满足静力许可场的外载荷为下限解.

2012-06-28 收到第 1 稿, 2013-01-10 收到修改稿.

1) 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目 (2011CB013505), 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室知识创新工程青年人才领域前沿项目 (O613021Q01).

2) 李春光, 副研究员, 主要研究方向: 计算岩土力学. E-mail: cgli@whrsm.ac.cn

显然, 下限法的求解实际上可以归结为一个数学规划问题, 即在所有静力许可应力场中, 寻找一个静力场使其对应的极限载荷最大. 该问题可以描述成

$$\begin{aligned} & \max : \eta \\ & \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + \eta F_i = \mathbf{0}, \quad \text{在 } V \text{ 内} \\ \sigma_{ij} n_j = \eta \bar{T}_i, \quad \text{在 } S_T \text{ 上} \\ F(\sigma_{ij}) \leq 0, \quad \text{在 } V \text{ 内} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, η 为载荷乘子, F_i 为单位体积上的体积力向量, \bar{T}_i 为作用在法向量为 n_j 的应力边界 S_T 上的面力, $f(\sigma_{ij})$ 为屈服条件.

2 下限原理有限元法

下限求解的难点在于如何构造静力许可场, 尽管可以采用边界元法^[12]、无网格法^[13]等构造应力场, 但有限元法仍是目前最主要的方法, 下面仍基于 Sloan 的节点应力插值的思想进行下限分析.

2.1 平衡方程

本文计算区域采用四边形离散, 以单元积分意义上的平衡取代三角形单元点点平衡, 达到对平衡方程线性化的目的, 同时不仅提高了精度, 而且减少了计算规模^[14].

采用四边形单元的插值函数对单元应力场进行插值, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_x^i \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_y^i \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^4 N_i \tau_{xy}^i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \tau_{xy}^i$ 为四边形单元节点 i 的应力分量, N_i 为节点 i 的形函数.

这里与三角形应力插值不同的是, 得到的单元应力场并不是空间坐标的线性函数, 而是双线性性质的函数.

将式 (2) 代入式 (1) 中的第 1 式, 可得单元的平衡方程, 显然, 它并不是单元节点应力的线性方程. 不过, 可以对两端在单元上积分, 使其在单元意义上满足平衡, 从而得到平衡方程的弱形式

$$\bar{B}^e \sigma^e = \bar{b}^e \quad (3)$$

式中, $\bar{B}^e = \iint B^e dA$, $\bar{b}^e = \iint b^e dA$, B^e 是与形函数的导数组成的非线性函数矩阵. 显然, 它是关于单元节点应力 σ^e 的线性方程, 从而实现了基于四边形单元平衡方程的线性化.

2.2 应力连续性条件

应力连续性条件与经典的下限法一样, 在单元公共边界上保持两侧正应力与剪应力分别相等^[5], 可得

$$A_{eq}^d \sigma^d = 0 \quad (4)$$

其中, A_{eq}^d 是与应力间断线的法向量有关的系数矩阵; σ^d 是单元边界两侧所对应的 4 个节点的应力分量.

2.3 应力边界条件

在单元边界上, 边界单元两端的法向应力分量或切向应力分量应分别等于其已知值^[5]. 则离散化后的边界单元的应力约束条件可表示为

$$A_{eq}^b \sigma^b = b_{eq}^b \quad (5)$$

其中, A_{eq}^b 是与单元边界法向量有关的系数矩阵, σ^b 是单元边界两端节点的应力分量; b_{eq}^b 是单元边界两端节点的切向和法向载荷矩阵.

2.4 强度条件的线性化

对平面问题中的任意应力点, 如能保证其各个方向上均不屈服, 则该点就不会屈服, 它启示我们: 如果对方位进行离散, 保证每个离散方位上都不屈服, 当离散足够充分时, 就会收敛到下限解. 如图 1 所示 (为了程序编制的方便, 本文中的应力符号采用拉正压负的规定), 把方位角以 x 轴为基准, 从 0 到 π 离散为 n 等份, 则第 k 个离散方位与 x 轴的夹角为

$$\alpha_k = k \frac{\pi}{n} \quad (6)$$

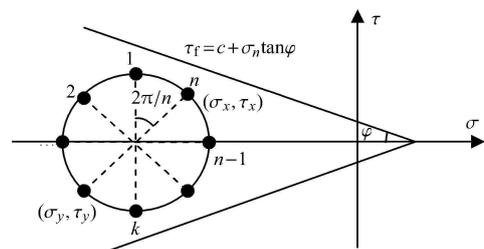


图 1 Mohr 圆的空间离散

Fig. 1 Spatial discretization of Mohr circle

该方位平面的外法线方向和切向方向向量分别为

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

如设该点的应力张量为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

则，该平面上的正应力和剪应力分别为

$$\sigma_n = \hat{n}^T \sigma \hat{n} \quad (10)$$

$$\tau = \hat{t}^T \sigma \hat{n} \quad (11)$$

显然，它们是 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 的线性函数。

该平面上的 Mohr-Coulomb 屈服条件为

$$|\tau| \leq c + \sigma_n \tan \varphi \quad (12)$$

也即是

$$\left. \begin{aligned} \tau &\leq c + \sigma_n \tan \varphi \\ \tau &\geq -c - \sigma_n \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中, c 为材料黏聚力, φ 为材料内摩擦角。

不难发现, 式 (13) 也是关于 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 的线性不等式。

至此, 已经实现了屈服准则的线性化。

2.5 保下限方法

采用上述的方法虽然可以逼近下限解, 但逼近过程并不能保证解的下限性质, 根本原因是: 即使每个离散方位都满足屈服条件, 仍可能会有部分方位位于屈服面外. 如图 2 中的粗实线所示。

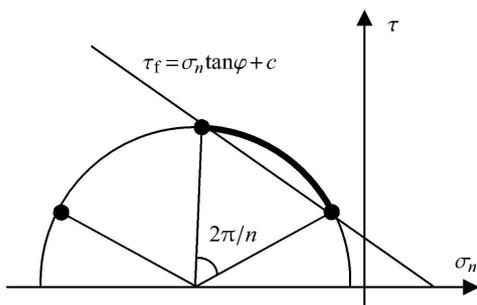


图 2 位于屈服面外的部分

Fig. 2 Part outside of yield surface

当相邻的 2 个离散方位的应力状态都位于屈服面上时, 如图 2 所示, 位于屈服面以外的部分最多, 这是最不利情况, 如能确保这种情形的应力圆都位于屈服面以下, 则可以保证解的下限性质. 为此, 寻找一个虚拟的强度面, 使得利用上述的线性化方法后的应力圆都位于真实的屈服面以内, 这里称虚拟强度面中的黏聚力为伪黏聚力, 如图 3 中的粗实线所示, 其求法如下:

图 3 所示的 Mohr 圆半径为

$$R = \left(c \cot \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \sin \varphi \quad (14)$$

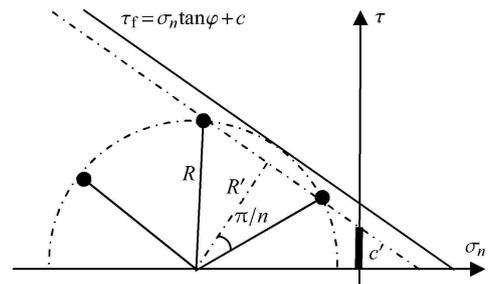


图 3 伪黏聚力

Fig. 3 Pseudo cohesion

而虚拟的强度面对应 Mohr 圆半径为

$$R' = \left(c' \cot \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \sin \varphi \quad (15)$$

则

$$R' = R \cos \frac{\pi}{n} \quad (16)$$

把式 (14) 和式 (15) 代入式 (16) 可得伪黏聚力

$$c' = c \cos \frac{\pi}{n} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tan \varphi \left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \quad (17)$$

用伪黏聚力 c' 取代式 (13) 中的 c 得

$$\left. \begin{aligned} \tau &\leq c' + \sigma_n \tan \varphi \\ \tau &\geq -c' - \sigma_n \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

采用式 (18) 即可保证解的下限性质, 且不等式仍为线性。

对于各向异性材料, 仅需将式 (18) 中的 c' 和 φ 替换成由方位控制的黏聚力函数和摩擦角函数即可。

3 数值算例

3.1 算例 1

该算例选用澳大利亚计算机应用协会 (ACADS)

的边坡稳定分析标准考题 1(c)^[15], 模型参数如图 4 所示. 土性参数见表 1, 边界条件为底部固端约束, 侧面法向约束. 单元划分如图 5 所示.

本文安全系数的计算采用文献 [6] 建议的方法, 即通过对强度参数打折试算, 求得超载系数逼近于 1 的强度折减系数.

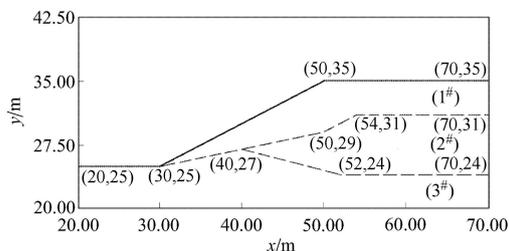


图 4 算例 1 的模型尺寸

Fig. 4 Model size of example 1

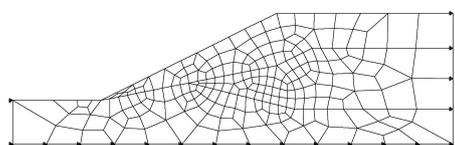


图 5 算例 1 的单元划分及边界条件

Fig. 5 Numerical mesh and boundary constraint of example 1

表 1 算例 1 中的土性参数

Table 1 Parameters for soils in example 1

Soil	$\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	c/kPa	$\phi/(\text{°})$
1 [#]	19.5	0	38
2 [#]	19.5	5.3	23
3 [#]	19.5	7.2	20

本算例的计算和收敛情况如表 2 和图 6 所示, 可见采用伪黏聚力安全系数从下方逼近真实解, 可以很好地保证解的下限性质. 采用图 5 的单元划分, 当 $n = 30$ 时, 所得的安全系数为 1.366, 这与推荐的裁判 (Donlad) 答案 1.39^[15] 的误差为 1.7%, 也很接近于

表 2 采用不等式 (13) 和 (18) 得到的算例 1 的计算结果

Table 2 Results of example 1 by Ineqs. (13) and (18)

n	Quadrilateral element		Triangle element		Sloan's method	Reference solution
	Ineq.(13)	Ineq.(18)	Ineq.(13)	Ineq.(18)		
6	1.417	1.201	1.343	1.128	1.175	1.39
12	1.393	1.340	1.302	1.249	1.252	
18	1.377	1.354	1.293	1.264	1.275	
24	1.378	1.365	1.293	1.280	1.282	
30	1.374	1.366	1.291	1.283	1.284	

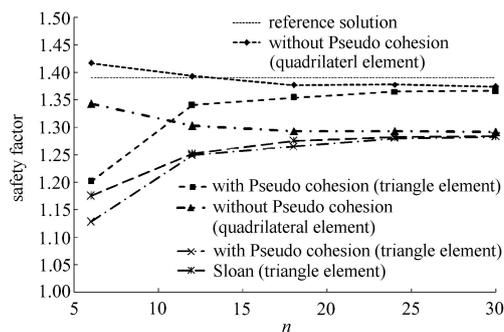


图 6 采用不等式 (13) 和 (18) 得到的算例 1 的收敛过程

Fig. 6 Convergence of example 1 by Ineqs. (13) and (18)

STAB 程序得到的 1.385^[15]; 如果采用相同尺寸控制的三角形单元, 收敛趋势与四边形类似, 与 Sloan 内接多边形方法一样, 当 $n = 30$ 时所得的解为 1.283, 与四边形相比偏小, 精度较低, 这主要是由于三角形单元表达的应力场过于“刚硬”造成的. 从图 6 还可以看出, 本文方法的精度与经典的 Sloan 方法相当, 当离散的方向达到 25 时, 几乎和 Sloan 的方法得到了一致的结果.

3.2 算例 2

算例 2 来自文献 [16], 是一个典型的公路边坡, 断面如图 7 所示, 包含 2 种性质的土层. 土性参数见表 3. 边界条件和单元划分如图 8 所示.

采用不等式 (13) 和 (18) 的计算和收敛情况如表 4 和图 9 所示, 可见采用伪黏聚力安全系数也是从下方逼近真实解, 保证了解的下限性质. 当 $n = 30$ 时, 所得的安全系数为 1.391, 这与 Spencer 法得到的 1.40 非常接近.

表 3 算例 2 中的土性参数

Table 3 Parameters for soils in example 2

Soil	$\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	c/kPa	$\phi/(\text{°})$
I	24	34	26
II	25	39	35

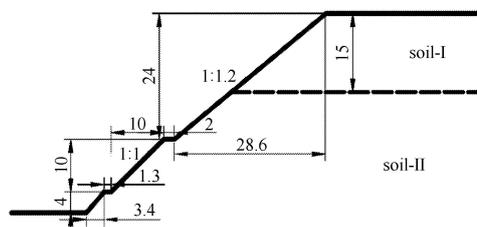


图 7 算例 2 的计算剖面

Fig. 7 The section for computation of example 2

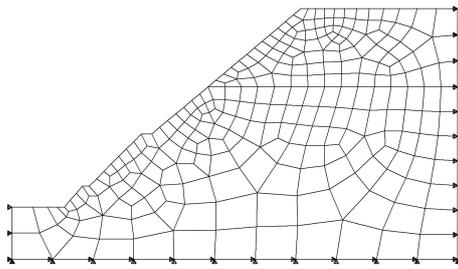


图 8 算例 2 的单元划分及边界条件

Fig.8 The mesh and boundary conditions of example 2

表 4 采用不等式 (13) 和 (18) 得到的算例 2 的计算结果

Table 4 Results of example 2 by Ineqs. (13) and (18)

n	Ineq.(13)	Ineq.(18)
6	1.453	1.243
12	1.413	1.355
18	1.403	1.377
24	1.401	1.386
30	1.400	1.391

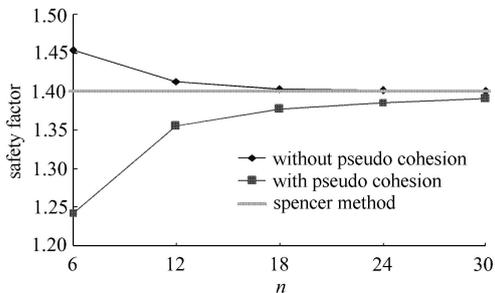


图 9 采用不等式 (13) 和 (18) 得到的算例 1 的收敛过程

Fig. 9 Convergence of example 1 by Ineqs. (13) and (18)

4 结论

由于下限原理的极限分析法具有严谨的力学基础,且得到的安全系数偏于安全,更具有实用价值。但在处理各向异性材料问题上,经典的线性化方法则显得力不从心。

本文在对以方位进行有限离散的基础上,对各离散方位施加屈服条件,得到了线性的不等式约束方程。为保证解的下限性质,引入伪黏聚力。算例表明了本文提出的方法可以稳定地从极限解的下方收敛到精确解,保证了解的下限性质,且与经典方法具有相同的收敛性。

该方法不仅丰富了基于线性规划的下限法理论,而且为强度各向异性问题的解决提供了坚实的理论基础。

参 考 文 献

- 1 Drucker DC, Greenberg HJ, Prager W. The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1951, 18(4): 371-378
- 2 Chen WF. Soil mechanics and theorems of limit analysis. *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div*, 1969, 95(2): 493-518
- 3 Yu HS, Salgado R, Sloan SW, et al. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1998, 124(1): 1-11
- 4 Lysmer J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div*, 1970, 96(4): 1311-1334
- 5 Sloan SW. Lower bound limit analysis using finite-elements and linear-programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, 12(1): 61-77
- 6 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的应用. *岩土工程学报*, 1997, 19(5): 84-89 (Li Guoying, Shen Zhujiang. Lower limit analysis using finite elements and its application in geotechnical problems. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(5): 84-89 (in Chinese))
- 7 杨洪杰, 葛修润, 王建华等. 序列二次规划 (SQP) 算法在三维下限分析中的应用. *上海交通大学学报*, 2004, 38(6): 992-995 (Yang Hongjie, Ge Xiurun, Wang Jianhua, et al. Application of SQP algorithm in 3d lower sequential quadratic programming limit analysis. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2004, 38(6): 992-995 (in Chinese))
- 8 黄齐武. 基于锥形规划理论的数值极限分析下限法及其应用. [博士论文]. 上海: 同济大学, 2007 (Huang Qiwu. Numerical lower bound limit analysis using second-order cone programming and its applications. [PhD Thesis]. Shanghai: Tongji University, 2007 (in Chinese))
- 9 陈炜, 王均星. 节理岩质边坡的块体元塑性极限分析下限法. *岩土工程学报*, 2008, 30(2): 272-277 (Chen Wei, Wang Junxing. Plastic lower bound limit analysis using block element method for jointed rock slope. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(2): 272-277 (in Chinese))
- 10 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 岩土工程中极限分析数值模拟的研究进展. *有色金属*, 2002, 54(3): 107-112 (Yang Xiaoli, Li Liang, Liu Baochen. Research and development of limit analysis in geotechnical engineering. *Nonferrous Metals*, 2002, 54(3): 107-112 (in Chinese))
- 11 Yu H, Sloan S. Limit analysis of anisotropic soils using finite elements and linear programming. *Mechanics research communications*, 1994, 21(6): 545-54
- 12 Zhang XF, Liu YH, Cen ZZ. Boundary element methods for lower bound limit and shakedown analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(8): 905-917
- 13 陈莘莘, 刘应华, 岑章志. 极限下限分析的正交基无单元 Galerkin 法. *力学学报*, 2007, 39(5): 633-640 (Chen Shenshen, Liu Yinghua, Cen Zhangzhi. Lower bound limit analysis by using the element-free galerkin method with orthogonal basis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(5): 633-640 (in Chinese))
- 14 李春光, 朱宇飞, 刘丰等. 基于四边形网格的下限原理有限元法. *岩石力学与工程学报*, 2012, 31(3): 461-468 (Li Chunguang, Zhu Yufei, Liu Feng, et al. Lower bound limit analysis using finite el-

- ement method of quadrilateral meshes. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, 31(3): 461-468 (in Chinese)
- 15 陈祖煜. 土质边坡稳定分析的原理、方法与程序. 北京: 中国水利水电出版社, 2003 (ChenZuyu. Soil Slope Stability Analysis—Theory, Methods and Programs. Beijing: China WaterPower Press, 2003 (in Chinese))
- 16 Zheng H, Tham L, Liu D. On two definitions of the factor of safety commonly used in the finite element slope stability analysis. *Computers and Geotechnics*, 2006, 33(3): 188-195

(责任编辑: 周冬冬)

A NEW LINEARIZATION METHOD OF MOHR-COULOMB YIELD SURFACE FOR LOWER BOUND PROBLEMS¹⁾

Li Chunguang²⁾ Zhu Yufei Liu Feng Deng Qin Zheng Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract Compared with the limit equilibrium method, the lower limit analysis has a more rigorous mechanics foundation, and the safety factor acquired by the lower limit analysis is more conservative and valuable. Although many scholars have done many useful researches on it, however, the classical linearization method cannot solve the general problem of the anisotropy of strength. In this paper, spatial discretization is implemented, and the yield criterions on the discrete directions are built. Finally, pseudo cohesion is introduced to keep the property of lower bound analysis. The examples show that the result can converge to exact solution stably from below. Proposed method not only enriches the lower bound theory based FEM and linear programming, also lays a solid foundation for anisotropic problems.

Key words lower bound analysis, pseudo cohesion, linear programming, spatial discretization

Received 28 June 2012, revised 10 January 2013.

1) The project was supported by the National Basic Research Program of China (2011CB013505), the Knowledge Innovation Program of State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering (O613021C01).

2) Li Chunguang, associate professor, research interests: computational geotechnical mechanics. E-mail: cgli@whrsm.ac.cn