第 45 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 45，No. 2
2013 年 3 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Mar.，2013

研究论文

基于非协调边界元法和涡方法的黏性流场研究[1)]

丁静鹄 叶继红[2)]

(东南大学混凝土与预应力混凝土教育部重点实验室, 南京 210018)

摘要 基于非协调边界元方法和涡方法的联合应用, 模拟了二维和三维黏性不可压缩流场. 计算中利用离散涡元对漩涡的产生、凝聚和输送过程进行模拟, 并将整体计算域分解为采用涡泡模拟的内部区域和用涡列模拟的数字边界层区域. 计算域中涡量场的拉伸和对流由 Lagrangian 涡方法模拟, 用随机走步模拟涡量场的扩散. 内部区域涡元涡量场速度由广义 Biot–Savart 公式计算, 势流场速度则采用非协调边界元方法计算. 非协调边界元将所有节点均取在光滑边界处, 从而避免了法向速度的不连续现象; 而对于系数矩阵不对称的大型边界元方程组, 引入了非常高效的预处理循环型广义极小残余 (the generalized minimum residual, GMRES) 迭代算法, 使得边界元法的优势得到了充分发挥, 同时, 在内部涡元势流场计算中对近边界点采用了正则化算法, 该算法将奇异积分转化为沿单元围道上一系列线积分, 消除了势流计算中速度及速度梯度的奇异性. 二维、三维流场算例证明了所用方法的正确性, 也验证了该算法可以大幅度提高模拟精度和效率.

关键词 涡方法, 非协调边界元方法, GMRES 迭代算法, 正则算法, 黏性流场

中图分类号：O357.1 **文献标识码**：A DOI：10.6052/0459-1879-12-171

引 言

现代的涡方法是以 Chorin [1] 提出的涡团法为标志, 其特征有两点: 一是把无黏流的涡方法发展到可以考虑黏性扩散效应, 从而成为解 Navier–Stokes 方程的一种数值方法; 二是用有一定大小的涡核代替原先的点涡, 使核函数非奇异化. Chorin [2] 提出在数字边界层内采用涡列模拟涡量流动, 其在二维计算时, 并没有采用传统涡方法中的涡泡而是用线状的涡列模拟数字边界层内的涡. 涡列在数字边界层内的流动由以涡量流函数为变量的 Prandtl 方程控制. 整体计算域被分为 2 个部分: 内部区域, 采用传统的涡方法即涡泡模拟涡量场; 数字边界层, 采用涡列模拟涡量场. 该方法不同于在整体计算域中统一采用涡泡模拟涡量场的传统涡方法. Nakanisi 等 [3] 应用计算域分为两部分的涡方法模拟了雷诺数为 1 000 时圆球的绕流, 在计算过程中共划分了 288 个边界单元, 采用面元法对势流场进行了计算. Turkiyyah 等 [4] 成功的使用该方法预测了二维流场中的建筑物风压, 并应用面元法计算了势流场. 由于其二维建筑物简单的几何形状, 采用面元法可以准确地对势流场进行计算, 最终计算结果得到了风洞实验的验证. Gharakhani 等 [5] 将该方法扩展到三维计算域, 并用长方形的涡列模拟了低雷诺数下简单三维计算域的流体流动, 而对势流场采用传统边界元方法计算. 但是传统边界元方法有以下缺点: 对边界元数值求解过程中流体区域的尖角尖边问题没有很好地处理; 内部点的速度和速度势进行求解过程中对于由边界元方程引起的奇异性没有很好地解决; 边界元方程求解过程没有优化, 造成计算时间过长, 边界元方法的优势没有被完全发挥. Zhao 等 [6] 计算了螺旋桨在水中的动力学情况, 其在内部区域首先应用时间积分方法计算涡量的拉伸, 而采用粒子强度交换方法计算涡量扩散. 势流场速度采用面元法计算, 近边界点速度和速度梯度的奇异性同样并没有很好地解决.

综上所述, 涡方法已经能够成功的模拟二维无界或有界流动, 但是目前的涡方法在模拟三维流动时面临着一些困难：计算三维流动的涡方法基本上都采用面元法或传统边界元方法对势流场进行计算, 但是面元法只适用于简单的二维计算域, 并不适用于三维复杂流体域的计算；采用传统边界元方法对势流场计算时, 流体区域的尖角尖边没有很好地被处理；在求解过程中对于内部势流场近边界点的速度及速度梯度产生的奇异性没有很好地解决；采用

2012–06–04 收到第 1 稿, 2012–12–04 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金 (51125031) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划 (CXLX-0130) 资助项目.

2) 叶继红, 教授, 主要研究方向: 大跨空间结构抗震、抗风及轻钢结构抗火, E-mail: yejihong@seu.edu.cn

面元法或传统边界元方法对势流场计算时, 造成计算时间过长, 以致计算无法完成.

针对上述情况, 本文考虑采用非协调边界元方法对势流场进行计算. Xu 等 [7] 将边界元法应用在膜结构与风耦合计算中, 假定流场为势流场, 为边界元法的应用研究打下了良好的基础, 但是计算时间比较长, 并没有完全发挥出边界元法的优势. Li 等 [8] 引入了非协调边界元技术可以很好地解决边界元数值求解过程中流体区域的尖角和尖边问题, 避免了应用传统边界元法带来的计算精度的损失, 并且采用预处理循环型广义极小残余 (the generalized minimum residual, GMRES) 迭代算法, 大大缩短了计算时间.

本文的主要目的为将非协调边界元计算势流场的方法引入到涡方法整体计算中. 目前, 在涡方法中, 计算势流的主要困难为计算过程中边界速度势的奇异性和近边界点的速度奇异性, 而在采用边界元方法计算内部势流场的速度时, 边界速度势的正确性具有决定性因素. 本文采用的非协调元方法可以有效消除计算边界速度势的奇异性. 由于采用传统边界元方法对内部势流场进行计算过程中, 对于内部点靠近壁面时产生的速度及速度梯度奇异性无法克服, 只能采用近似的方法消除由奇异性产生的计算结果不稳定性, 必然会对计算结果产生影响, 甚至会得到相反的结果, 然而涡量又是由于势流在壁面摩擦产生的, 因此不难理解, 正确求解近壁面的速度和速度梯度是非常重要的. 基于此本文引入正则化计算方法消除了近边界点的速度及速度梯度奇异性, 使得计算结果得到解析解, 同时本文针对边界元方程组采用 GMRES 算法, 使得边界元的优势得到更加充分的体现.

1 计算方法

基于非协调元方法和涡方法对黏性流进行求解时, 将整体计算域分解为两个部分: 数字边界层区域, 即靠近壁面极薄的区域, 对于此区域的流场应用涡量流函数为变量的 Prandtl 方程进行模拟; 内部区域, 即整体计算域中除去数字边界层的区域, 控制方程为以涡量流函数为变量的 Navier－Stokes 方程. 数字边界层并不等同于实际物理边界层, 只是在这个区域中采用涡列模拟涡量场的流动比应用涡泡模拟更加精确和简洁.

在涡方法中对 Navier－Stokes 方程进行变换, 使用涡量流函数为变量代替初始变量得到三维不可压缩、黏性流动的涡量动力学方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\nabla\boldsymbol{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

$$\nabla\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

$$\omega(\boldsymbol{x}, t) = \nabla\times\boldsymbol{u} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (\boldsymbol{u}_\tau, \boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_n) \tag{4}$$

式中, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ 为无量纲坐标向量, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u, v, w)$ 为无量纲速度向量, t 为无量纲时间. ν 为雷诺数的倒数. 在边界表面, 速度向量由局部坐标系 $\tau\rho n$ 表示.

下面分别阐述内部计算域和数字边界层计算域.

1.1 内部流场

对方程 (1) 可以采用分解方法将每个时间步分解为 2 个部分: 首先采用欧拉方程 (方程 (5)) 计算涡量场的变化, 然后再运用黏性扩散方程 (方程 (6)) 对涡量场的变化进行修正, 方程如下所示

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\nabla\boldsymbol{u} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

根据 Helmholtz 定律可以将流场中的速度矢量和速度梯度分解为由涡量场引起的部分与由势流场引起的部分.

1.1.1 欧拉方程

涡方法的本质是将整体连续的涡量场离散化为若干个涡元. 每个涡元具有体积 ΔV_j、涡量 ω_j, 因此整体涡量场离散为

$$\omega(x, t) = \sum_{j=1}^{N_v} \dot{\varGamma}_j(t)\delta(x - x_j) \tag{7}$$

式中, $\dot{\varGamma}_j(t) = \omega_j(t)\Delta V_j$ 为体积涡量, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, N_v 为涡元总数.

由方程 (7) 可以得到 N_v 个涡元的无网格化欧拉方程 (方程 (5)) 的 Lagrangian 形式解, 并采用时间积分方法可以得到

$$\boldsymbol{\chi}_i^*(x, t_{k+1}) = \boldsymbol{\chi}_i(x, t_k) + F(\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{\chi}_i, t_k))\Delta t \tag{8}$$

$$\dot{\varGamma}_i(\boldsymbol{\chi}_i, t_{k+1}) = \dot{\varGamma}_i(\boldsymbol{\chi}_i, t_k) + F(\dot{\varGamma}_i(\boldsymbol{\chi}_i, t_k)\nabla u_i(\boldsymbol{\chi}_i, t_k))\Delta t \tag{9}$$

式中, $k = 0, 1, \cdots$; $i = 1, 2, \cdots, N_v$, $\boldsymbol{\chi}_i$ 为第 i 个涡量单元的流动轨迹, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 为时间间隔, $F(\cdot)$ 为时间积分方法. 根据文献 [9] 可知采用不同的时间积分方

法, 计算结果误差不大, 因此考虑计算的精确性和经济性, 本文采用一阶修正 Euler 时间积分方法.

1.1.2 扩散方程

扩散方程 (方程 (6)) 的 Green 函数解同时为具有 0 均值和方差为 $2t/Re$ 的三维 Gaussian 分布函数. 因此, 每个时间步的黏性扩散过程可以表示为每个涡量单元的随机走步过程

$$\boldsymbol{\chi}_i(x, t_{k+1}) = \boldsymbol{\chi}_i^*(x, t_{k+1}) + \boldsymbol{\eta}_i(\triangle t) \tag{10}$$

式中, $k = 0, 1, \cdots$; $i = 1, 2, \cdots, N_v$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$ 为 3 个方向的随机变量. 利用随机走步的方法可以模拟黏性流动, 但是随机走步的收敛率与 $1/\sqrt{N_v Re}$ 相关[10-11].

1.1.3 涡量速度

由涡量场引起的速度矢量可以由 Biot–Savart 定律求得

$$\boldsymbol{u}_\omega(\boldsymbol{x}, t) = \int \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) \times \omega(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}/(4\pi|\boldsymbol{x}|^3)$ 为三维速度核函数. 当涡量单元互相靠近时, 三维速度核函数将会引起奇异性, 导致数值解不稳定. 因此, 本文引入平滑函数来消除奇异性. 采用圆形涡团, 设 $f(r)$ 为轴对称函数, 且满足归一化条件 $\int f(r)\mathrm{d}s = 1$, 其中 r 是由涡团中心量起的距离, $\mathrm{d}s$ 是面积微元. 定义平滑函数为 $f_\sigma(r) = f(r/\sigma)/\sigma^3$, 对圆形涡团而言, σ 相当于涡团半径. 在引入涡团平滑函数以后, 速度矢量的离散式改写为

$$\boldsymbol{u}_\omega(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_v} \boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \times \dot{\Gamma}_j(t) \tag{12}$$

式中, $\boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) f(|\boldsymbol{x}|/\sigma)$, $f(r) = \tanh(r^3)$, 并且 $\boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

1.1.4 势流速度

内部区域任意点的势流速度矢量可以由速度势函数的梯度表示

$$\boldsymbol{u}_p = -\nabla \varPhi \tag{13}$$

式中 $\varPhi$ 为速度势函数.

将式 (13) 代入连续方程可以得到内 Neumann 问题, 对其可以采用边界元方法进行计算, 将边界离散为 NE 个单元则有

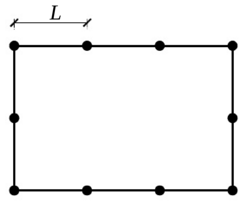
$$c(P)\varphi(P) + \sum_{e=1}^{NE} q^*(Q, P)\varphi(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q) = \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} \varphi^*(Q, P)q(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q) \tag{14}$$

利用法向速度边界条件, 可以通过边界元方程求解出所有边界点的速度势, 根据边界元方程可知由边界点的速度势可以求解出内部点的速度及速度梯度. 对于三维问题, 当场点 Q 和源点 P 位于同一个单元时, 边界元积分方程中核函数 φ^* 和 q^* 分别含有因子 r^{-1} 和 r^{-2}, 相应的积分分别为弱奇异和强奇异积分. 对于该类奇异积分, 国内外学者做了相关研究[8-9,12-13], 这里采用文献 [8] 介绍的方法进行计算, 该方法可以有效的消除在边界元计算过程中由于奇异积分引起的计算不稳定性.

由于实际问题中计算域边界非光滑, 有尖角和尖边存在, 而尖角尖边处节点的法向速度 q 难以确定, 因为此处节点同时处于不同的面, 各个面 q 值未必一致, 即法向速度在此处突变. 在边界元求解时, 要求合理给出这些点的 q 值, 否则对整个方程组求解精度有影响. 处理这个问题的手段主要有增加单元法、混合单元法和非协调单元法. 本文采用非协调单元法, 它将所有节点均取在光滑边界处, 从而避免了法向速度的不连续现象. 和普通单元节点取在单元端点不同, 非协调单元的节点取在单元的内部 (如图 1 和图 2).

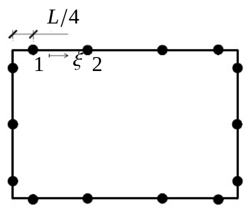
非协调单元插值函数与普通单元不同. 对于图 1 中节点 1 和 2 所在单元, 节点 1 和 2 的局部坐标为 $\xi_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\xi_2 = 1$, 对应的插值函数分别为 $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$, 单元中任一点的法向速度为

$$q = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_2 \tag{15}$$



(a) 初始单元网格

(a) Initial element mesh

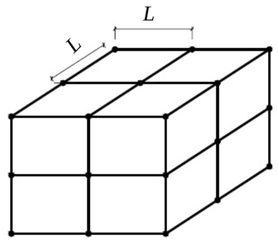


(b) 增加非连续单元后的网格

(b) Element mesh after adding discontinuous elements

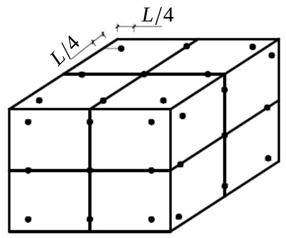
图 1 二维区域边界的非协调单元

Fig. 1 Discontinuous elements in 2D case



(a) 初始单元网格

(a) Initial element mesh



(b) 增加非连续单元后的网格

(b) Element mesh after adding discontinuous elements

图 2　三维区域边界的非协调单元

Fig. 2 Discontinuous elements in 3D case

利用插值函数性质

$$\left.\begin{aligned}&N_1(-\frac{1}{2})=1,\ N_2(-\frac{1}{2})=0\\&N_1(1)=0,\ N_2(1)=1\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

得到

$$N_1(\xi)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\xi,\ \ N_2(\xi)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\xi\tag{17}$$

而三维单元可以类似方法求得单元的插值函数.

是否采用非协调单元要由边界点处边界的光滑性来判断, 这一过程在计算程序中自动实现. 对于三维模型, 可以在边界元程序中判断相邻边界面单元的法向向量的夹角. 如果夹角接近 0°, 那么可以近似认为此处表面光滑; 否则, 应采取非协调单元 (图 2). 而对于二维模型, 则通过判断相邻线单元的切线的夹角来判断光滑性, 在尖角处采取非协调单元 (图 1).

经过以上方程的求解可以得到边界点的速度势. 由边界元方程的定义可知, 区域内点 y 的速度和速度梯度可以由边界点的速度势通过对边界元方程求导及再次求导得到

$$u_{yj}=\frac{\partial\varphi_y}{\partial x_j}=-\int\varphi^*_{,j}\mathrm{d}\Gamma+\int q\varphi^*_{,j}\mathrm{d}\Gamma,\ j=1,2,3\tag{18}$$

$$\frac{\partial u_{yj}}{\partial x_l}=\int\varphi q^*_{,jl}\mathrm{d}\Gamma-\int\varphi^*_{,jl}q\mathrm{d}\Gamma,\quad j,l=1,2,3\tag{19}$$

式中, $\varphi^*_{,j}=[1/(4\pi r^3)](3r_{,i}r_{,j}+\delta_{ij})$, $q^*_{,j}=\varphi^*_{,j}n_i$, $\varphi^*_{,jl}=[3/(4\pi r^4)](-5r_{,i}r_{,j}r_{,l}+\delta_{ij}r_{,l}+\delta_{il}r_{,j}+\delta_{jl}r_{,i})$, $q^*_{,jl}=\varphi^*_{,jl}n_i$, $q^*_{,jl}=\varphi^*_{,jl}n_i$.

由式 (18) 与式 (19) 形式可知如采用传统边界元方法求解内部点的速度和速度梯度, 当内部点靠近边界时会产生强奇异积分与超强奇异积分, 此时产生的奇异积分则不能再采用文献 [8] 介绍的方法进行消除. 关于超强奇异积分国内外学者也做了相关研究[14-17]. 这里采用文献 [15-16] 介绍的正则化算法对其奇异性进行消除, 其基本思想是将强奇异面积分和超强奇异面积分转化为沿单元围道上一系列线积分, 而高斯数值积分能够有效地计算这些线积分, 从而解析地计算出强奇异积分和超强奇异积分. 具体做法如下：

考虑三节点线性等参元, 定义如图 3 所示局部平面直角坐标系 $o\xi\eta$, 则三节点在坐标系 $o\xi\eta$ 中的局部坐标 (ξ,η) 可以由三节点在空间直角坐标系中的整体坐标求得. 将单元的几何坐标和物理参量采用节点 1, 2 和 3 相应值和线性插值函数表示.

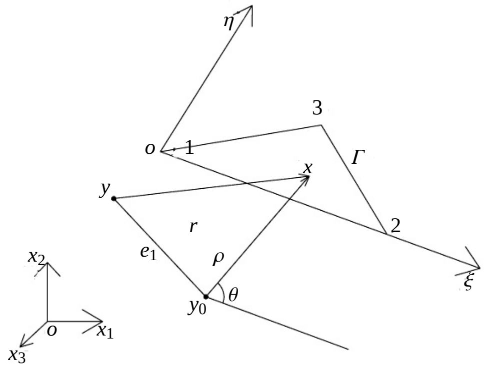


图 3　3 种参考系

Fig. 3 Three reference frame systems

设源点 y 在单元所在面上的垂足为 y_0, 进一步在平面 $o\xi\eta$ 上建立一个极坐标系 $\rho\theta$, 极点与 y_0 重合, 极轴初位置与 $o\xi$ 平行, 并将局部坐标和极坐标转换关系代入由坐标系 $o\xi\eta$ 确定的形函数可以得到

$$r_1=\frac{\rho}{2A}(b_m\cos\theta+c_m\sin\theta)x_{mi}+y_{0i}-y_i\tag{20}$$

式中, b_m, c_m 分别由节点在 $o\xi\eta$ 的局部坐标表示, A 为三角形单元面积.

对式 (18) 和式 (19) 采用分部积分将面积分转换为沿单元围道的一系列线积分, 并且反复采用分部积分可以将原积分方程转换为形如 $I_n=\int\frac{Q_n}{R^{n/2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int\frac{Q_n}{r^n}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 积分形式, Q_n 为 ρ 的多项式. 至此, 式 (18) 和式 (19) 中的面积分已经转化为关于变量 θ (图 3) 的一系列线积分, 此时常规高斯积分可以有效的计算这些线积分.

1.2 数字边界层区域

本节所有的变量都将采用局部坐标系表示. z 向为平面的法向并且指向流体内部, $z=0$ 表示固壁表面, $x-y$ 平面为固壁表面切平面, 整体流场及数字边界层的计算示意图如图 4 所示.

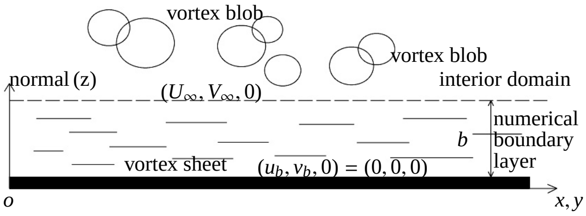


图 4 整体流场及数字边界层区域示意图

Fig. 4 Entire flow field and the numerical boundary layer region

由于内部区域流场涡量的对流和扩散及应用法向非穿透条件之后, 会在壁面引起切向速度 (u^+, v^+), 而静止壁面速度为 $(u^-, v^-)=(0,0)$, 因此会在极小的薄层内产生速度阶跃, 即为涡量的产生. 涡层强度为

$$\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}, t) = (\hat{\gamma}_x, \hat{\gamma}_y, \hat{\gamma}_z) = (-(v^+ - v^-), (u^+ - u^-), 0) \tag{21}$$

式中, $\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}, t)$ 和它的离散形式即为面涡, u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度. 方程 (28) 定义了满足壁面非滑移边界条件的力学机理. $\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}, t)$ 同样可以被离散为一系列长方形的涡列, 边长分别为 h^t_{xi} 和 h^t_{yi}, 在点 $(x_i, y_i, 0)$ 处具有涡量强度值 $\bar{\gamma}(x_i, y_i, 0, t)$. 如果涡列强度大于涡列最大强度 $\gamma_{\max}$ (MSS), 则将其分解为 N_{si} 个涡列, $N_{si} = |\bar{\gamma}(x_i, y_i, 0, t)/\gamma_{\max}| + 1$, 每个涡列具有的涡量为 $\bar{\gamma}(x_i, y_i, 0, t) = \bar{\gamma}(x_i, y_i, 0, t)/N_{si}$.

一旦涡量在壁面产生, 它在数字边界层内的发展和变化可以由涡量流函数为变量的 Prandtl 方程控制. 同样对 Prandtl 方程进行时间积分, 可以得到涡列在数字边界层内的流动为

$$\boldsymbol{x}^*_i(t_{k+1}) = \boldsymbol{x}_i(t_k) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_k)\Delta t \tag{22}$$

$$z_i(t_{k+1}) = |z^*_i(t_{k+1}) + \eta_i(\Delta t)| \tag{23}$$

式中, $k = 0, 1, \cdots$; $i = 1, 2, \cdots, NT$; $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 表示涡列的运动轨迹. 星号表示只有在壁面的法向方向才有黏性扩散作用. 一旦有涡列进入固壁区域, 则舍去, 并在以固壁表面为对称轴的数字边界层内部位置产生一新的与原涡列性质相同的涡列.

在一个时间步内一旦确定了涡列在数字边界层内的分布, 则其在局部坐标系下的速度矢量将可以由以下方程求得

$$u(\boldsymbol{x}, t) = u_\infty(x_i, y_i, b, t) - \frac{1}{2}\gamma_y(\boldsymbol{x}_i, t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{NT} \gamma_y(\boldsymbol{x}_j, t)\varphi_j(x_i, y_i)H(z_j - z_i) \tag{24}$$

$$v(\boldsymbol{x}, t) = v_\infty(x_i, y_i, b, t) - \frac{1}{2}\gamma_x(\boldsymbol{x}_i, t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{NT} \gamma_x(\boldsymbol{x}_j, t)\varphi_j(x_i, y_i)H(z_j - z_i) \tag{25}$$

$$w(\boldsymbol{x}_i, t) = 0 \tag{26}$$

式中, $i = 1, 2 \cdots, NT$; H 为 Heaviside 阶跃函数, NT 为涡列总数, $\varphi_j(x_i, y_i)$ 为涡列 i 和涡列 j 的面积叠合率, $\varphi_j(x_i, y_i) = \dfrac{A_i \cap A_j}{A_i}$. 由于涡列的法向速度远小于水平切向速度, 因此本文计算中采用的法向速度为 0, 涡列在法向方向主要为由黏性扩散引起的位移.

1.3 压力场求解

一旦计算域的涡量场和速度场确定之后, 压力场可以通过对 Poisson 方程和 Neumann 边界条件联合求解得到

$$\int_V B\nabla^2 G \mathrm{d}V + \int_S B\nabla G \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\boldsymbol{n} G \mathrm{d}S + \nu\int_S \nabla G \times \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \int_V (\boldsymbol{u}\times\omega)\nabla G \mathrm{d}V \tag{27}$$

式中, B 为 Bernoulli 函数: $B = \dfrac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \dfrac{P}{\rho}$. 应用该式可以得到 Bernoulli 函数的分布, 进而得到压力场分布.

1.4 计算流程及计算参数

采用非协调边界元方法和涡方法联合计算的流程为:

(1) 应用非协调边界元方法计算符合壁面无穿透条件的势流.

(2) 在内部区域计算涡泡的速度场 (式 (12) 计算涡量场速度, 式 (13) ~ 式 (20) 计算势流场速度).

(3) 计算由于涡量变化和势流而引起的壁面滑移速度.

(4) 计算数字边界层区域的每个涡列的速度 (式 (24) ~ 式 (26)).

(5) 产生新的涡列来抵消掉壁面滑移速度 (式 (21)).

(6) 更新涡泡和涡列的位置 (式 (8) ~ 式 (10) 计算涡泡位置变化, 式 (22) 和式 (23) 计算涡列位置变化).

(7) 检查涡列和涡泡的位置. 如果涡列进入内部区域则变成涡泡, 而如果涡泡进入数字边界层区域, 则舍去.

(8) 计算壁面压力场 (式 (27)).

(9) 迭代回第一步, 直至计算趋于稳定.

计算参数中的数字边界层厚度 b、最大涡列强度 MSS、边界单元尺寸 h 和涡泡的计算半径 r 是有决定影响的参数, 直接影响到结果是否收敛. 文献 [20] 建议数字边界层厚度应该取涡列随机走步的标准方差的倍数: $b = NBH \times \sqrt{2\Delta t/Re}$, $1 \leqslant NBH \leqslant 3$, 以使任何一个涡列在一个时间步内跃出数字边界层的几率尽可能的小. 任何一个新涡列在进入内部区域成为涡泡之前, 会在数字边界层内停留多个时间步, 而涡列一旦跨出数字边界层, 则转换为具有涡量的涡泡. 由第 1.2 节介绍可知, 更小的 MSS 表示将在数字边界层区域产生更多的涡列, 即将会有更多的涡元存在于流场中, 从而增加求解时间. 边界单元尺寸的选择要保证壁面单元划分的准确, 并保证在每个时间步内每个涡列的运动距离没有越过一个单元, 即 $\Delta t u_{\max} \leqslant h$. 涡泡半径本文取为壁面单元边长 h.

2 算例分析

黏性流场中无滑移物面是涡量的唯一来源, 因此模拟靠近壁面处的势流至关重要. 本文采用非协调边界元方法对势流场进行计算. 非协调边界元将节点取在光滑边界处, 从而避免了法向速度的不连续；对于由势流场内部点靠近壁面时引起的巨大误差, 本文采用 1.1.4 节介绍的正则化方法处理, 用此算法可以精确计算近场点的势流, 并大幅度降低计算误差；使用 GMRES 算法对边界元方程进行求解, 该算法是一种求解大型非对称线性方程组的 Krylov 子空间投影法. 由于该算法所需计算量和内存量较少等方面的优势, 在求解大型线性方程组方面有非常大的优势, 因此可将边界元方法的优势充分发挥. 本文所用方法的正确性和高效性将由以下几个算例验证.

计算步骤如下: 在无量纲时间 0^- 时刻, 流场中不存在流体的流动, 而在无量纲时间 0^+ 时刻, 满足壁面法向条件的势流产生, 但是由于流体在近壁面处存在速度阶跃, 会在贴近壁面处产生涡量, 即流场中的涡产生. 黏性流场中的涡量具有扩散特性, 随着时间的发展, 涡量会向内部区域扩散和对流, 此时涡量场在壁面上的诱导速度不会满足粘附条件, 将会在壁面引起法向速度, 本文采用非协调边界元方法满足流场中的壁面法向无穿透条件. 应用非协调边界元方法之后, 会在壁面产生滑移速度, 因此需要产生新的涡列来抵消壁面的滑移速度. 最终, 不可压缩、黏性整体流场形成.

2.1 二维流场

本节采用文献 [4] 中算例, 流体流过长方形建筑物, 其尺寸符合文献 [18-19] 中介绍的实验尺寸. 图 5 为无量纲坐标系下的流场示意图, 特征长度由实验中的建筑物高度决定. 计算域被选定为长 12、宽 4 的长方形区域, 建筑物正面迎风面距流场入口无量纲距离为 4. 二维建筑物结构的无量纲尺寸为: 长 2.2、高 1. 计算模型共划分为 340 个单元, 340 个节点. 在整体计算中运行非协调边界元程序, 程序自动判断模型尖角尖边位置, 并且自动设置非协调单元并增加新节点, 最后的节点数目为 348. 流场的雷诺数为 $Re = 2\,300\,000$, 无量纲时间步间隔 $\Delta t = 0.05$. 采用 GMRES 算法对边界元方程求解. 定义接近度为源点到单元的最小距离与单元长度比值的两倍, 它反映了源点距离边界的相对接近程度 [17]. 由二维 Navier–Stokes 方程可知, 在势流场计算中只需计算速度场而无需计算其速度梯度. 由二维边界元方程可知对其求解速度场时会产生强奇异积分. 根据文献 [17] 对于二维位势问题, 当接近度小于 0.68 时采用传统边界元方法计算结果开始失效, 而大于 0.68 时采用传统边界元方法计算可以得到精确解析解. 经验算本文的接近度均为大于 0.68, 根据其结论可知采用传统边界元方法计算即可得到精确解析解.

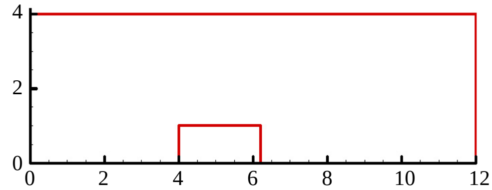


图 5 二维流场示意图

Fig. 5 2D flow field

在计算中, 为简化计算, 只将流场区域中的建筑物上表面假定为满足非滑移边界条件, 即为无滑移表面.

采用涡方法和非协调边界元法对流场计算时, 可以计算每个时间步的流场发展, 图 6 为 $NBH = 2.5$ 时无量纲时刻流场中涡量的产生发展和变化情况, NBH 为 2.4 节介绍的涡列随机走步标准差的倍

数. 由图 6 可知, 涡泡在流场中产生之后沿流场方向流动, 在 t = 7.5 时刻到达流场边界, 与图 7 中涡泡数量减少的情况相吻合, 并且在该时间流场开始达到稳定状态.

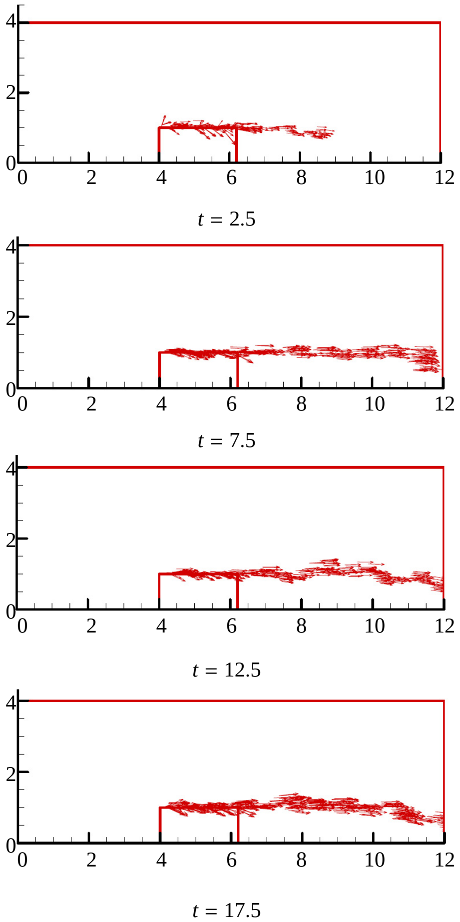


图 6 涡泡速度矢量图 (NBH = 2.5)

Fig. 6 Vortex blob velocity vector (NBH = 2.5)

对于 NBH 的取值, 不同的文献采用了不同的方法, 一般推荐取值为 1~3 倍的基准值之间. 本文采用了 4 种不同的 NBH 进行了计算, 计算中统一采用的最大涡列强度 MSS 为 0.1. 图 7 为取不同 NBH 时涡泡和涡列数量图. 由图 7 可知, 采用 4 种不同 NBH 计算时, 当 $2 \leqslant NBH \leqslant 3$ 时, t = 7.5 之后涡泡和涡列的数量趋于稳定, 但 NBH = 1.5 时, 由于 NBH 取值偏小, 产生涡泡数量最多, 在 t = 10 和 t = 22 之间涡泡数量产生剧烈的震荡, 但 4 种方案的计算结果均趋于收敛. 涡泡数量重复出现极大峰值, 在峰值之后会出现明显下滑, 涡列数量的突然减少和涡泡数量增长相吻合. 由于采用不同的 NBH, 涡列和涡泡趋于稳定之后的数量有明显变化. NBH = 1.5 的涡列数量明显小于其他 3 种情况, 而涡泡数量大于其他 3 种情况, 此现象与数字边界层的定义等相吻合.

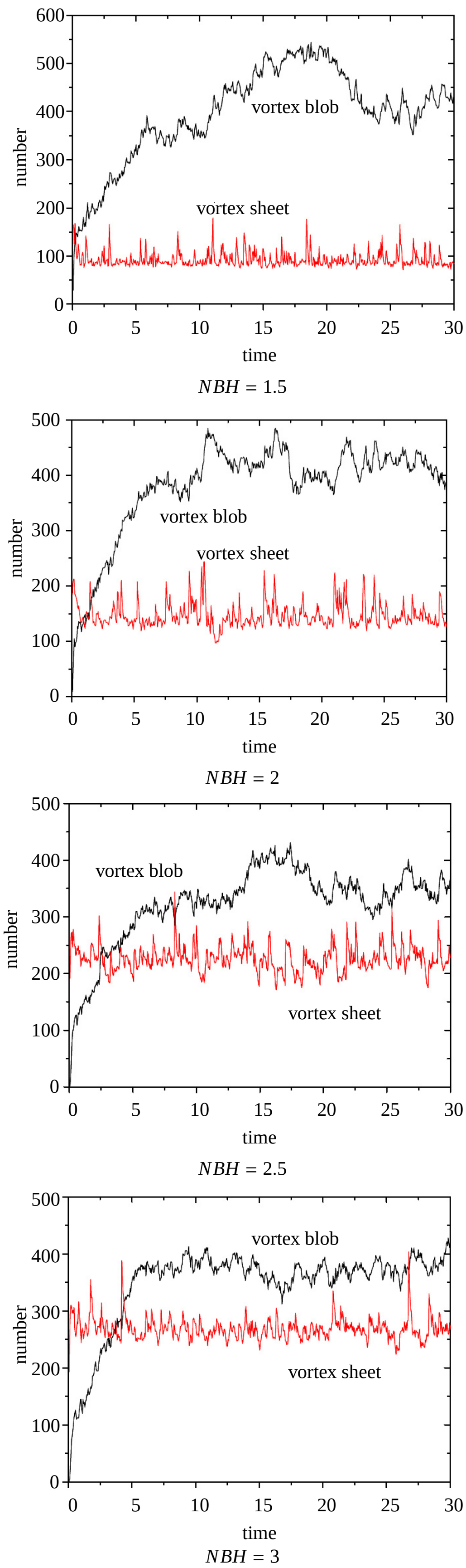


图 7 涡泡、涡列数量

Fig. 7 Number of vortex blobs and vortex sheets

在流体力学中，一般将压强用无量纲的数 —— 压强系数 C_{pi} 来表示，表达式为

$$C_{pi}=\frac{2(p_i-p_\infty)}{\rho V_\infty^2}=\frac{p_i-p_\infty}{p_0-p_\infty} \tag{28}$$

式中，p_i，p_∞ 和 p_0 分别是第 i 点压强、来流压强 (静压)、驻点压强 (总压).

对 C_{pi} 做数据处理，可以得到平均风压系数 $C_{pi,\mathrm{mean}}$，公式如下

$$C_{pi,\mathrm{mean}}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}C_{pi}(j) \tag{29}$$

式中，$C_{pi}(j)$ 为 i 点处第 j 时刻的压强系数值，N 为每个点的统计数值.

图 8 为 4 种不同 NBH 取值时，平均风压系数的计算结果与文献 [4, 18-19] 的对比图. 平均风压系数为所有计算步瞬时风压系数值的平均值. 虽然计算参数与实验参数取值相同，但是由于在实验过程中有非恒定的湍流输入而在计算模拟中采用恒定输入，同时实验结果为三维工况，而本文计算则设定为二维工况，所以出现了误差. 本文虽然和文献 [4] 设置为同样的雷诺数和入口风速，但是文献 [4] 在计算中将物体前的壁面也设置为非滑移边界条件，所以会在物体迎风位置产生较大的风压，而本文只将物体表面假定为非滑移边界条件，因此会在物体迎风表面处风压系数偏小，而在物体表面其他位置本文计算结果和文献 [4] 计算结果保持一致.

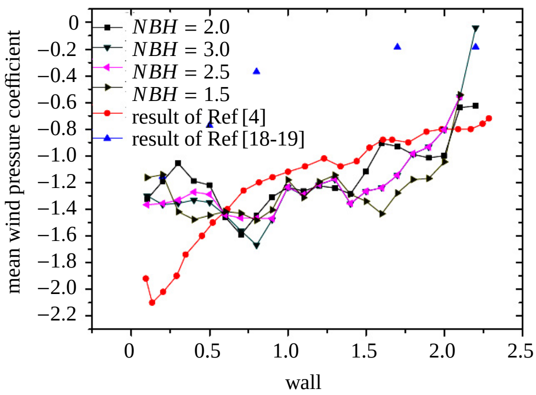
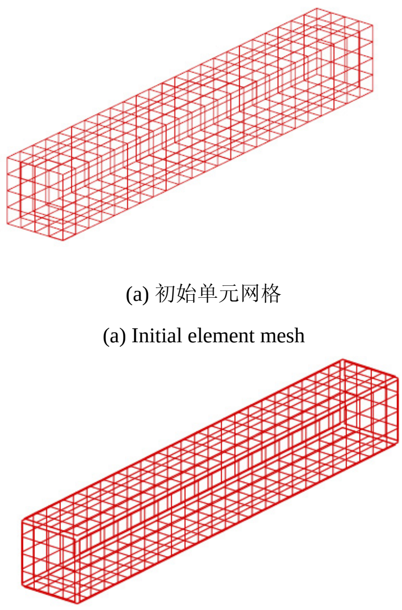


图 8 平均风压系数对比 (不同 NBH 取值、文献、试验值)

Fig. 8 Mean wind pressure coefficient (different values of NBH, reference, experimental)

2.2 三维流场

这里选用和文献 [5] 中相同的管道流算例对本文计算方法的准确性进行验证. 流体为黏性、不可压缩流. 计算域长宽高比分别为 7 : 1 : 1; 流场入口流速恒定为无量纲速度 1; 雷诺数根据入口流速和特征长度选取为 100; 计算模型共划分 416 个矩形单元，418 个节点 (图 9(a))，采用非协调元后，节点数目增加到 550 (图 9(b)). 如图 9 所示，当采用非协调元之后其节点均取在光滑边界上，有效避免了尖角尖边处法向速度势的不连续问题.



(a) 初始单元网格

(a) Initial element mesh

(b) 增加非连续性单元后的网格

(b) Element mesh after adding discontinuous elements

图 9 整体流场单元图

Fig. 9 Element mesh of whole flow field

对势流场计算时，由于本文采用了四节点线性四边形非协调元，所以在计算的过程中借鉴了文献 [15-16] 中的推荐方法 (文献推荐方法为将其细分为 8 个三角形单元或更多个三角形单元，但是针对于本文算例，将其细分为 2 个三角形线性单元的计算精度符合要求)，将其剖分为 2 个三角形线性等参元，如图 10 所示.

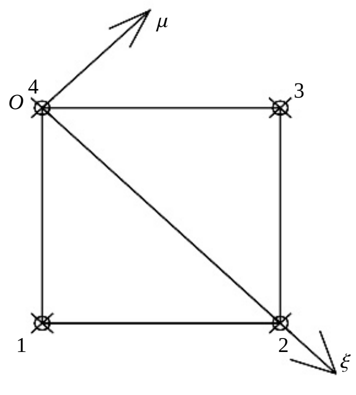


图 10 单元的细分

Fig. 10 The subdivision on element

这样经过对单元的细分, 就可以将本文初始划分的四节点四边形线性单元分解为符合正则化算法的三节点线性等参元.

表 1 中的计算方案包含了不同参数的选取和组合, 因此可以检验不同计算参数对计算结果的影响.

表 1 不同计算方案的计算参数

Table 1 Calculation parameters of different computational schemes

Computational scheme	NBH	Δt	MSS	Number of time steps
case 1	0.5	0.10	0.100	300
case 2	0.5	0.05	0.100	600
case 3	1.0	0.10	0.100	300
case 4	1.0	0.10	0.250	300
case 5	1.5	0.10	0.125	300
case 6	1.5	0.10	0.250	300
case 7	2.0	0.10	0.250	300

图 11 为涡泡与涡列数量总和与时间的对比图, 可知 7 个计算方案在无量纲时刻 $t = 5$ 后涡泡与涡列数量达到稳定, 不同计算方案的计算结果最终均达到稳定收敛. 计算方案 2 的涡泡和涡列总量最多, 计算方案 4, 6 和 7 总量量接近, 并为最少, 此结果符合表 1 中计算参数的选取 —— 方案 2 采用了最小的数字边界层厚度、时间间隔和涡列强度, 理论上会产生最多的涡泡与涡列. 方案 2 的计算时间最长, 为大约 20 h, 其他计算方案的计算时间约为 13 ~ 18 h 之间, 计算时间与涡泡涡列数目总和成正比. 采用 fluent 软件对该算例进行计算时, 由于可以采用不同的模型对黏性流场进行模拟, 因此计算时间也不尽相同, 达到稳定状态的计算时间一般最少在 30 h 以上, 由此可知本文采用 GMRES 算法的必要.

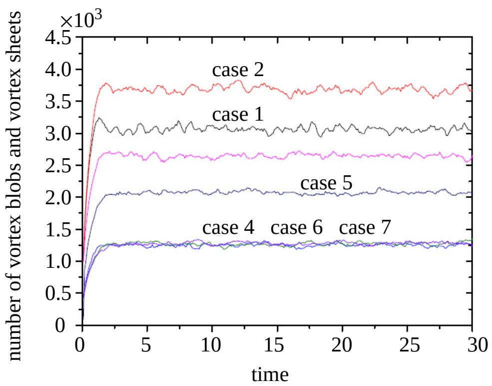


图 11 涡泡和涡列数目

Fig. 11 Number of vortex blobs and vortex sheets

图 12 为采用 $NBH = 1.5$ 时, 5 个特征时刻涡泡及涡泡速度矢量图 ($x-z$ 平面, 侧面), 可以清晰的描述整体流场由初始状态到达稳定状态的全过程. 当 $t = 0.1$ h 时涡量场刚刚产生, 产生的涡泡数量较少. 随着时间的推进, 涡泡数量逐渐增多, 直至达到稳定状态. 涡泡和底部壁面之间的空白区域为数字边界层, 为了避免在图中显示混乱, 数字边界层内的涡列没有显示. 由图可见, 数字边界层的厚度是固定的, 而物理边界层的厚度随着时间的发展逐渐变化.

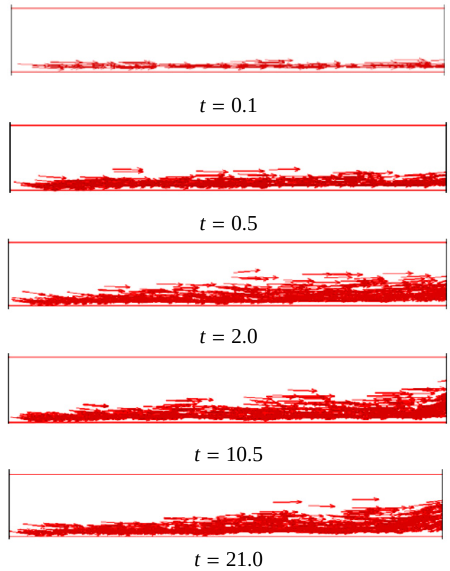
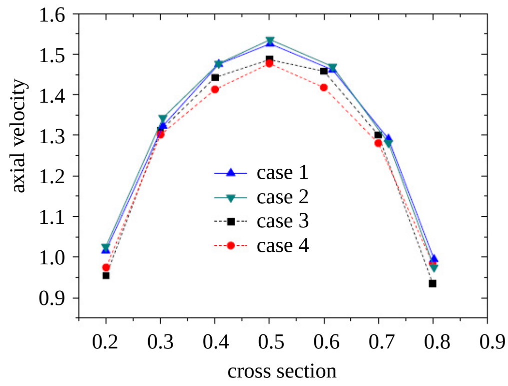


图 12 涡泡速度矢量图 ($x-z$ 平面)

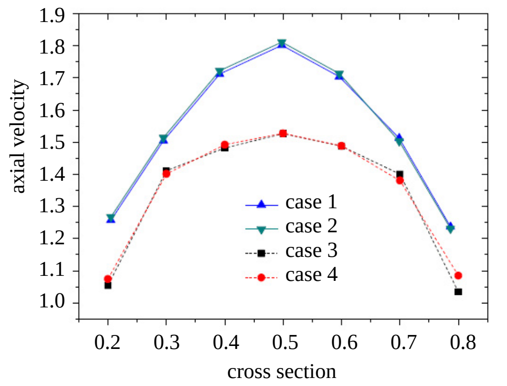
Fig. 12 Velocity vector of vortex blobs ($x-z$ plane)

图 13 为 $NBH = 0.5$, $NBH = 1$ 时距流场入口 4.5 处横截面 4 个不同 z 高度处轴向速度分布图, 该轴向速度为所有瞬时时间步的轴向速度均值. 图 13 表明, 当采用相同的数字边界层厚度时, 改变涡列最大强度值与时间间隔, 虽然产生的涡元数目相差较大 (图 11), 但轴向速度并没有显著变化. 减小涡列强度和时间间隔并不会显著增加流体计算的精度, 但会显著增加计算时间 (case 1 约为 18 h, case 2 约为 20 h, case 3 约为 15 h, case 4 约为 17 h). 当采用其他 NBH 值时与此结论一致.

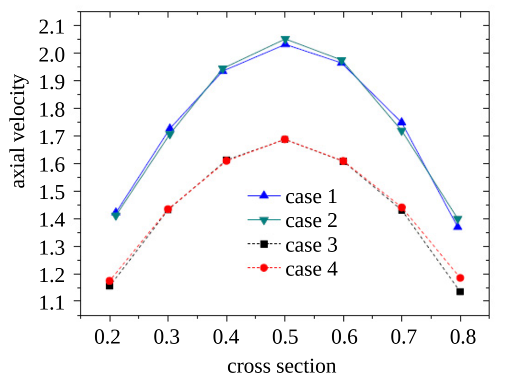
图 14 为采用不同 NBH 时距流场入口 4.5 处横截面轴向速度, 为简化显示, 本文只采用了横截面高为 0.5 位置的轴向速度, 采用文献 [5] 推荐的文献 [21] 的解作为理论值. $NBH = 0.5$ 时, 本文采用了 case 1 计算方案, 因为根据图 13, case 1 方案可以保证精度, 并节省计算时间. 由图 14 可知采用不同的 NBH 对计算精度有较大影响, $NBH = 0.5$ 的计算结果符合文献 [21] 的理论值, 在其他位置处的计算结



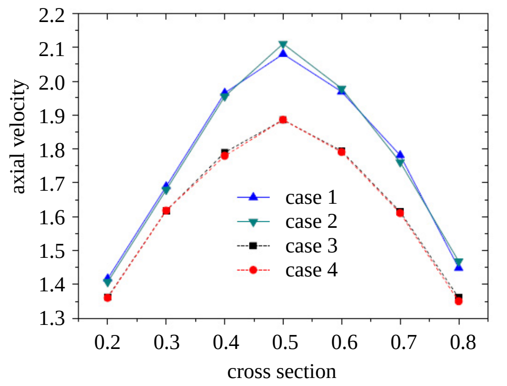
(a) z = 0.2



(b) z = 0.3



(c) z = 0.4



(d) z = 0.5

图 13　横截面轴向速度

Fig. 13 Axial velocity of cross section

果与此一致. 图 14 结论与 2.1 节中的流场采用不同 NBH 时计算结果趋于一致的结论不同, 主要原因: 由于 2.1 节为高雷诺数计算, 当采用不同的 NBH 时, 整体流场中的涡泡数目近似相等, 而在低雷诺数工况时, 流场中的涡泡数目相差较大, 由文献 [10-11] 可知流场中存在的涡泡数目与计算精度成正比; 根据数字边界层的定义, 当采用高雷诺数计算时流场中的数字边界层极薄, 对流场的影响远小于低雷诺数下数字边界层对流场的影响. 由于本文在计算势流过程中采用了非协调边界元方法和对近边界点计算时采用了正则化算法, 消除了势流计算中速度及速度梯度的奇异性, 因此当 NBH = 0.5 时整体精度高于文献 [5], 在部分区域已经近似和理论值相等, 整体趋势和理论值更加接近; 另外本文的 NBH = 1 时部分区域的计算结果精度也已经高于文献 [5] NBH = 0.5 时的结果精度.

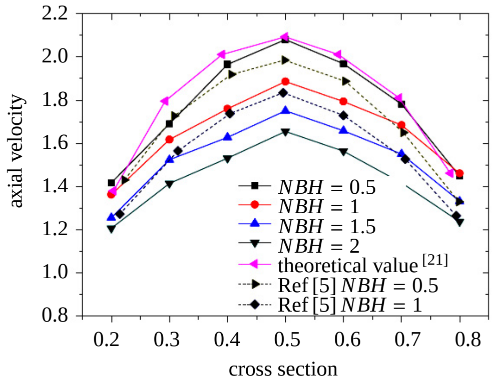


图 14　横截面 z = 0.5 处轴向速度

Fig. 14 Axial velocity of cross section at z = 0.5

3 结 论

本文基于非协调边界元方法和涡方法的联合应用, 对二维和三维黏性、不可压缩流场进行了求解. 在整体计算域中将 Navier–Stokes 方程转换为涡量流函数方程, 流场中涡量的各种特性均可以由数学方法进行模拟. 在计算中将整体计算域分解为采用涡泡模拟的内部区域和采用涡列模拟的数字边界层区域. 本文所用方法具有以下特点和结论:

(1) 高雷诺数计算时, 当采用不同的数字边界层厚度时, 由于整体流场中的涡泡数目近似相等, 并且数字边界层厚度极薄, 因此采用不同的数字边界层厚度对计算结果影响较小; 而在低雷诺数计算时, 采用不同的数字边界层时流场中的涡泡数目相差较大, 同时数字边界层的厚度大于高雷诺数时工况, 对流场影响较大, 因而对数字边界层的厚度的选择更具

有敏感性. 考虑到计算精度和效率, 对于高雷诺数流场数字边界层厚度取 1.5 倍涡列随机走步的标准方差即可; 而低雷诺数流场取 0.5 倍即可以得到近似精确解. 涡列强度虽然可以影响流场中涡元数目, 但根据对三维流场的分析可知, 采用相同的边界层厚度时, 不同的涡列最大强度对计算结果的影响不大.

(2) 计算过程中将非协调边界元方法引入整体计算过程中, 可以很好解决计算域中的尖角尖边问题. 采用 GMRES 算法对非协调边界元矩阵进行求解, 使得边界元法的优势得到充分发挥. 在势流计算中采用正则化方法对近边界点的速度和速度梯度进行求解, 消除了计算过程中的奇异性. 综上, 二维、三维流场模拟算例表明, 由于计算势流过程中采用了非协调边界元方法和正则化方法, 计算精度得到了较大幅度提升; 又由于采用了 GMRES 算法, 显著提高了计算效率.

参 考 文 献

1 Chorin AJ. Numerical study of slightly viscous flow. *J Fluid Mech*, 1973, 57(4): 785-796

2 Chorin AJ. Vortex sheet approximation of boundary layers. *J comput Phys*, 1978, 27(3): 428-432

3 Nakanishi Y, Kamemoto K. Numerical simulation of flow around a sphere with vortex blobs. *J wind Eng Ind Aero*, 1992, 46-47(1): 363-381

4 Turkiyyah G, Reed G, Yang JY. Fast vortex methods for predicting wind-Induced pressures on buildings. *J Wind Eng Ind Aerodyn*, 1995, 58(1-2): 51-79

5 Gharakhani A, Ghoniem AF. Three-dimensional vortex simulation of time dependent incompressible internal viscous flows. *J Comput Phys*, 1997, 134(1): 75-95

6 Zhao LJ, Tsukamoto H. Hybrid vortex method for high Reynolds number flows around three-dimensional complex boundary. *Comput Fluids*, 2007, 36(7): 1213-1223

7 Xu W, Ye JH, Shan J. The application of BEM in the membrane structures interaction with simplified wind. *Structural Engineering and Mechanics*, 2009, 31(3): 349-365

8 Li Y, Ye JH. The interaction between membrane structure and wind based on the discontinuous boundary element. *Sci China Ser E-Tech Sci*, 2010, 53(2): 486-501

9 Jun L, Beer G, Meek JL. Efficient evaluation of integrals of order l/r, l/r^2, l/r^3 using Gauss quadrature. *Engineering Analysis*, 1985, 2(3): 118-123

10 Milinzaao F, Saffman PG. The calculation of large Reynolds number fluid flow suing discrete vortices with random walk. *J Comput Phys*, 1977, 23(4): 380-392

11 Roberts SG. Accuracy of the random vortex method for a problem with non-smooth initial conditions. *J Comput Phys*, 1985, 58(1): 29-43

12 Nagarajan A, Mukherjee S. A mapping method for numerical evaluation of two-dimensional integrals with l/r singularity. *Computational Mechanics*, 1993, 12(1-2): 19-26

13 Phongtinnaboot W, Rungamornrat J, Chintanapakdee C. Modeling of cracks in 3D piezoelectric finite media by weakly singular SGBEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35(3): 319-329

14 Maatouk K. Estimating quadrature errors for an efficient method for quasi-singular boundary integral. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(9): 4658-4670

15 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 三维边界元法中几乎奇异积分的正则化算法. 力学学报, 2004, 36(1): 49-56 (Niu Zhongrong, Wang Xiuxi, Zhou Huanlin. A regularization algorithm for the nearly singular integrals in 3-D BEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36: 49-56 (in Chinese))

16 周焕林, 牛忠荣, 王秀喜. 三维位势问题边界元法中几乎奇异积分的正则化. 计算物理, 2005, 22(6): 501-506 (Zhou Huanlin, Niu Zhongrong, Wang Xiuxi. Regularization of nearly singular integrals in the boundary element method for 3-D potential problems. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2005, 22(6): 501-506 (in Chinese))

17 周焕林, 王秀喜, 牛忠荣. 位势问题边界元方法中几乎奇异积分的完全解析算法. 中国科学技术大学学报, 2003, 33(4): 431-437 (Zhou Huanlin, Wang Xiuxi, Niu Zhongrong. Completely analytical algorithm of nearly singular integrals in the boundary element method of potential problems. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2003, 33(4): 431-437 (in Chinese))

18 Levitan ML, Mehta KC, Vann WP. Field measurements of pressures on the Texas Tech Building. *J Wind Eng Ind Aerodyn*, 1991, 38(2-3): 227-234

19 Levitan ML, Mehta KC. Texas tech field experiments for wind loads, Part II: meteorological instrumentation and terrain parameters. *J Wind Eng Ind Aerodyn*, 1992, 41-44(1-3): 1577-1588

20 Fishelov D. Vortex methods for slightly viscous three-dimensional flow. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1990, 11(3): 399-424

21 Rouse H. Advanced Mechanics of Fluids. New York: John Wiley&Sons Inc, 1965. 120-126

(责任编辑: 刘希国)

VISCOUS FLOW FIELD BASED ON DISCONTINUOUS BOUNDARY ELEMENT METHOD AND VORTEX METHOD [1)]

Ding Jinghu Ye Jihong[2)]
(*Key laboratory for RC&PC Structures of China Ministry of Education*，*Southeast University*，*Nanjing* 210018，*China*)

Abstract The two-dimensional, three-dimensional viscosity and incompressible flow fields are simulated bases on a combination application of discontinuous boundary element method and vortex method in our present study. Discrete vortex elements are used to analogue the vorticity generation, accumulation and transport mechanisms of the unsteady separated flow fields. And it decomposes the computing domain into an interior domain of vortex blobs and a thin numerical boundary layer of vortex sheets. The convection and stretch of the vortical field is imitated by Lagrangian vortex method, and the random walk method is adopted to describe the diffusion process of the vortical field. Additionally, vortex element's vortical velocity is calculated by generalized Biot-Savart law, while discontinuous boundary element method is used to compute potential velocity. To avoid the discontinuous of normal velocity, all nodes of discontinuous boundary element are selected at smooth boundary. Since a large scale boundary element equation set with a nonsymmetrical coefficient matrix should be solved, the present study import a pre-conditioning the generalized minimum residual (GMRES) iterative algorithm, which takes full advantage of the boundary element method. Moreover, regularization algorithm that applies at interior points close to the boundary, which the nearly singular surface integrals are transformed into a series of line integrals along the contour of the element, help to eliminate the unacceptable results of potential velocity and velocity gradient in potential calculation. The accuracy of present method is verified in both examples of two-dimension and three-dimension flow field calculation, as well as the significant increased simulation precision and efficiency.

Key words vortex method, discontinuous boundary element method, GMRES iterative algorithm, regularization algorithm, viscous flow field

Received 4 June 2012, revised 4 December 2012.

1) The project was supported by the National Science fund for Distinguished Young Scholars (51125031) and Graduate Student Research and Innovation Program of Jiangsu Province (CXLX-0130).

2) Ye Jihong, professor, research interests: seismic resistance and wind resistance of large-span structure and fire resistance of cold-formed steel structure, E-mail: yejihong@seu.edu.cn