

三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔¹⁾郝颖 吴志强²⁾

(天津大学机械工程学院力学系, 天津 300072)

摘要 分析了乘性和加性噪声作用下三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔. 首先用随机平均法得到系统的随机微分方程, 求得系统响应幅值的稳态概率密度函数. 然后应用分岔分析的奇异性理论, 求得随机 P 分岔发生的临界参数条件, 得到多种定性不同的稳态概率密度曲线. 讨论了 2 种激励噪声强度和系统阻尼对响应稳态概率密度曲线峰的个数、各峰值相对大小的影响. 通过 Monte-Carlo 数值模拟对理论计算结果进行了验证. 该方法可用于其他系统的随机 P 分岔分析.

关键词 随机 P 分岔, 概率密度函数, 奇异性理论

中图分类号: O324 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-169

引言

随机分岔主要是指由随机扰动引起的系统定性性质的变化^[1-2]. 人们在研究噪声诱发的系统行为转变时, 首先发现当系统的控制参数跨过某一个临界值时, 不变测度密度的分布曲线由单峰变成双峰^[3]. 文献 [4-6] 对谐和与宽带噪声、谐和与白噪声、有界噪声激励下强非线性系统的随机 P 分岔现象进行了分析. 在研究谐和与宽带噪声联合激励下含分数导数型阻尼 Duffing 振子平稳响应的 P 分岔现象时, 发现分数阶数的变化可以导致系统发生随机 P 分岔^[7-8]. 此外对单自由度 Duffing 振子在窄带噪声激励下的跳跃和分岔现象也进行过分析^[9-11]. 对有界噪声激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统响应的 P 分岔现象进行分析时, 发现调谐参数、时滞项系数等系统参数对系统分岔行为有一定影响^[12]. 文献 [13-14] 研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声、谐和与随机噪声联合激励下的双峰稳态概率密度, 用等效线性化方法求出了双峰稳态概率密度的表达式, 为此类系统随机 P 分岔的研究提供了参考.

确定随机 P 分岔的临界参数条件, 对深入分析参数影响有重要的意义. 目前, 随机 P 分岔的分析均根据概率密度极值点的数目变化来得到 P 分岔的临界参数条件, 文献 [15-17] 用这种方法对随机激励下 Duffing-Van der Pol 系统进行了研究, 确定了系

统响应的稳态概率密度函数 (probability density function, PDF) 从单峰变为双峰的临界参数条件, 没有考虑 PDF 曲线为双峰时两峰值相对高低的变化. 对参数变化引起的 PDF 曲线拓扑结构的变化, 目前还缺乏系统的研究方法.

本文主要研究三稳态 Van der Pol-Duffing 系统的随机 P 分岔, 求解随机 P 分岔发生的临界参数条件, 分析加性和乘性噪声强度、系统阻尼系数对 PDF 曲线的影响. 通过对随机系统转迁集的计算, 研究 2 种噪声和线性阻尼相互作用下系统稳态响应幅值的 PDF 曲线峰的数目、各峰值相对高度的变化. 为此类问题的进一步研究提供基础.

1 振动幅值稳态概率密度函数的推导

考虑如下形式的 Van der Pol-Duffing 系统

$$\ddot{x} - (-\mu + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 - \alpha_4 x^8)\dot{x} + x + 2x^3 = n_1(t) + xn_2(t) \quad (1)$$

其中, μ 为阻尼系数, n_1 和 n_2 为高斯白噪声, 噪声强度分别为 D_1 和 D_2 , 其他系数取定值为 $\alpha_1 = 1.51$, $\alpha_2 = 2.85$, $\alpha_3 = 1.693$, $\alpha_4 = 0.312$.

为方便讨论参数影响, 图 1(a) 给出了当 $D_1 = D_2 = 0$ 时, 确定性系统极限环的幅值随阻尼系数 μ 变化的分岔曲线. μ 在 $[0, 0.1148]$ 区间变化时系统有 2 个吸引子: 平衡点和极限环, 如图 1(b) 所示; μ 在 $[0.1148, 0.1188]$ 区间变化时, 系统有 3 个吸引子从内

2012-06-04 收到第 1 稿, 2012-09-29 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11172198), 教育部博士点基金 (2009003211005) 和教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-15-0247) 资助项目.

2) 吴志强, 教授, 主要研究方向: 非线性振动、分岔与混沌, 振动与控制. E-mail: zhiqw@tju.edu.cn

向外依次为：平衡点、小幅极限环和大幅极限环，如图 1(c) 所示； μ 在 $[0.1188, 0.1367]$ 区间变化时，系统有两个吸引子：平衡点和极限环，如图 1(d) 所示。由

于方程 (1) 中包含 7 次和 8 次非线性阻尼项，确定性系统最多有 3 个吸引子共存，这也是本文与其他研究的主要不同之处。

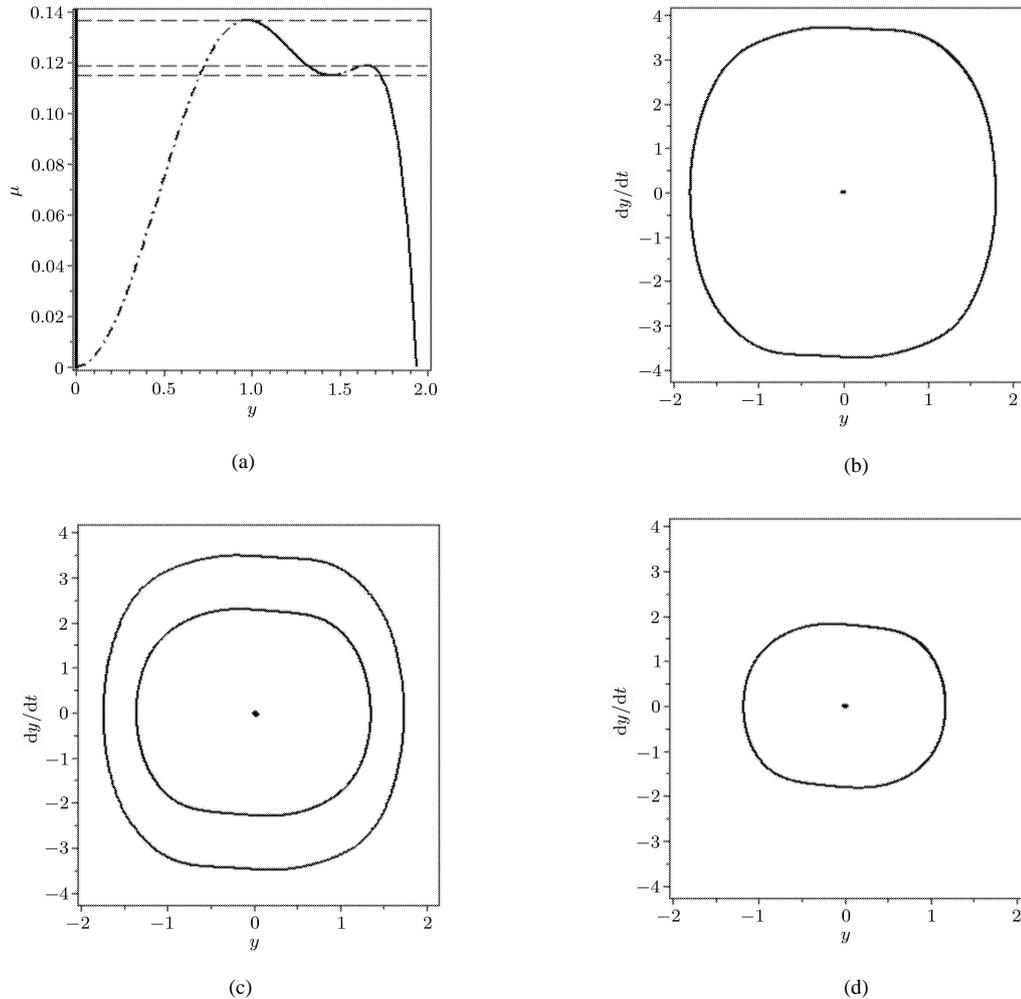


图 1 阻尼对吸引子分布的影响

Fig. 1 Damping effect on attractor distribution

为求解系统 (1) 响应的稳态概率密度函数，假设噪声强度 D_1 和 D_2 足够小，引入变换

$$\left. \begin{aligned} x &= y(t) \cos(t + \theta(t)), \quad \dot{x} = -y(t) \sin(t + \theta(t)) \\ \varphi &= t + \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

利用随机平均法可得到相应 Wiener 随机微分方程

$$\left. \begin{aligned} dy &= \left(-\frac{\mu y}{2} + \frac{\alpha_1 y^3}{8} - \frac{\alpha_2 y^5}{16} + \frac{5\alpha_3 y^7}{128} + \frac{7\alpha_4 y^9}{256} + \right. \\ &\quad \left. \frac{D_1}{2y} + \frac{3D_2 y}{8} \right) dt + \sqrt{D_1 + \frac{D_2 y^2}{4}} dw_1(t) \\ d\theta &= \frac{3\alpha_0 y^2}{8} dt + \sqrt{\frac{D_1}{y^2} + \frac{3D_2}{4}} dw_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中， $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是 2 个独立的单位 Wiener 过程。

因 dy 不依赖于 φ 的变化，易得幅值 y 的稳态概率密度函数为

$$p_s(y) = 4y(4D_1 + D_2 y^2)^{B(y)} e^{A(y)} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{y^2}{768D_2^4} (-21D_2^2\alpha_4 y^6 + 40D_2^3\alpha_3 y^4 + \\ &\quad 112D_1 D_2^2 \alpha_4 y^4 - 96D_2^3 \alpha_2 y^2 - \\ &\quad 240D_1 D_2^2 \alpha_3 y^2 - 672D_1^2 D_2 \alpha_4 y^2 + \\ &\quad 384D_2^3 \alpha_1 + 768D_1 D_2^2 \alpha_2 + \\ &\quad 1920D_1^2 D_2 \alpha_3 + 5376D_1^3 \alpha_4) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$B(y) = -2(D_2^4\mu + D_1D_2^3\alpha_1 + 2D_1^2D_2^2\alpha_2 + 5D_1^3D_2\alpha_3 + 14D_1^4\alpha_4)/D_2^5 \quad (5b)$$

由于 α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 给定, 概率密度函数的变化规律完全由随机噪声强度 D_1, D_2 和系统阻尼系数 μ 来确定. 下节引入新的理论讨论 3 个参数的影响.

2 参数对随机 P 分岔的影响

随机 P 分岔是指概率密度函数曲线拓扑形状的变化. 为揭示 P 分岔的临界参数条件, 本节引入分岔分析的奇异性理论.

将概率密度函数 (4) 改写为如下形式的方程

$$g = 4y(4D_1 + D_2y^2)^{B(y)}e^{A(y)} - p_s = 0 \quad (6)$$

视稳态概率密度 p_s 为分岔参数, 响应幅值 y 为状态变量, 则从奇异性理论的角度看^[18], 方程 (6) 即为分岔方程, 噪声强度 D_1 和 D_2 、阻尼系数 μ 即为开折参数. 开折参数变化时, 分岔曲线的类型可能会发生改变. 引起分岔曲线类型发生改变的临界参数的集合即为转迁集.

显然概率密度函数 (4) 是满足方程 (6) 的解, 因而稳态概率密度曲线就是分岔曲线. 因此分岔问题 (6) 的转迁集, 即为概率密度曲线发生定性改变的临界参数条件, 也就是随机 P 分岔发生的临界参数条件. 下面通过计算分岔问题 (6) 的转迁集来计算 P 分岔发生的临界参数条件.

分岔方程 (6) 的转迁集包括以下 3 种类型^[18]:

(1) B (分岔集)

$$\left. \begin{aligned} g(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ g_y(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ g_{p_s}(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

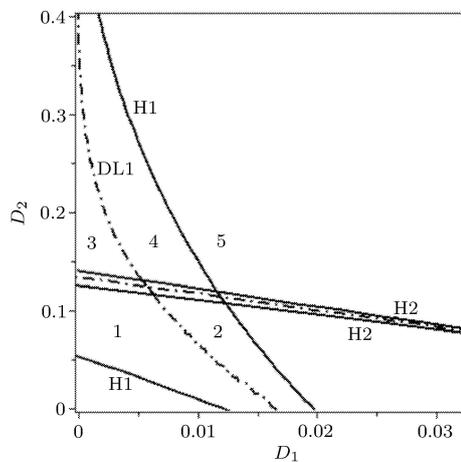
(2) H (滞后集)

$$\left. \begin{aligned} g(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ g_y(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ g_{yy}(y, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

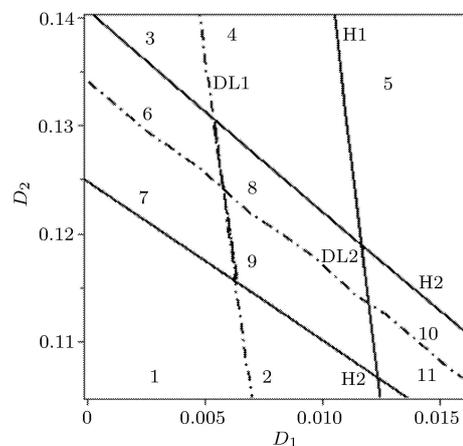
(3) DL (双极限点集)

$$\left. \begin{aligned} g(y_i, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ g_y(y_i, p_s; D_1, D_2, \mu) &= 0 \\ i = 1, 2; y_1 \neq y_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

计算表明, 分岔集是空集, 而另外两类集合为非空集合. 由于三维空间曲面的关系不易刻画和显示, 这里只给出转迁集的二维截面来表示噪声强度和阻尼系数的影响. 根据图 1(a) 中确定性系统吸引子的分布情况, 图 2 给出了阻尼系数 (a) $\mu = 0.15$, (b) $\mu = 0.13$, (c) $\mu = 0.117$, (d) $\mu = 0.10$ 这 4 种情况的转迁集, 为清楚反映图形的局部细节, 还给出了 $\mu = 0.15, \mu = 0.13$ 时转迁集的局部放大图: 图 2(a') 和图 2(b'). 图中 H1 和 H2 表示滞后集, DL1 和 DL2 表示双极限点集.



(a) $\mu = 0.15$



(a') $\mu = 0.15$

图 2 不同阻尼下的转迁集 (实线: 滞后集, 点划线: 双极限点集)

Fig. 2 Transition sets for different damping coefficients (Solid lines: hysteresis point sets, Dash-dotted lines: double limit point sets)

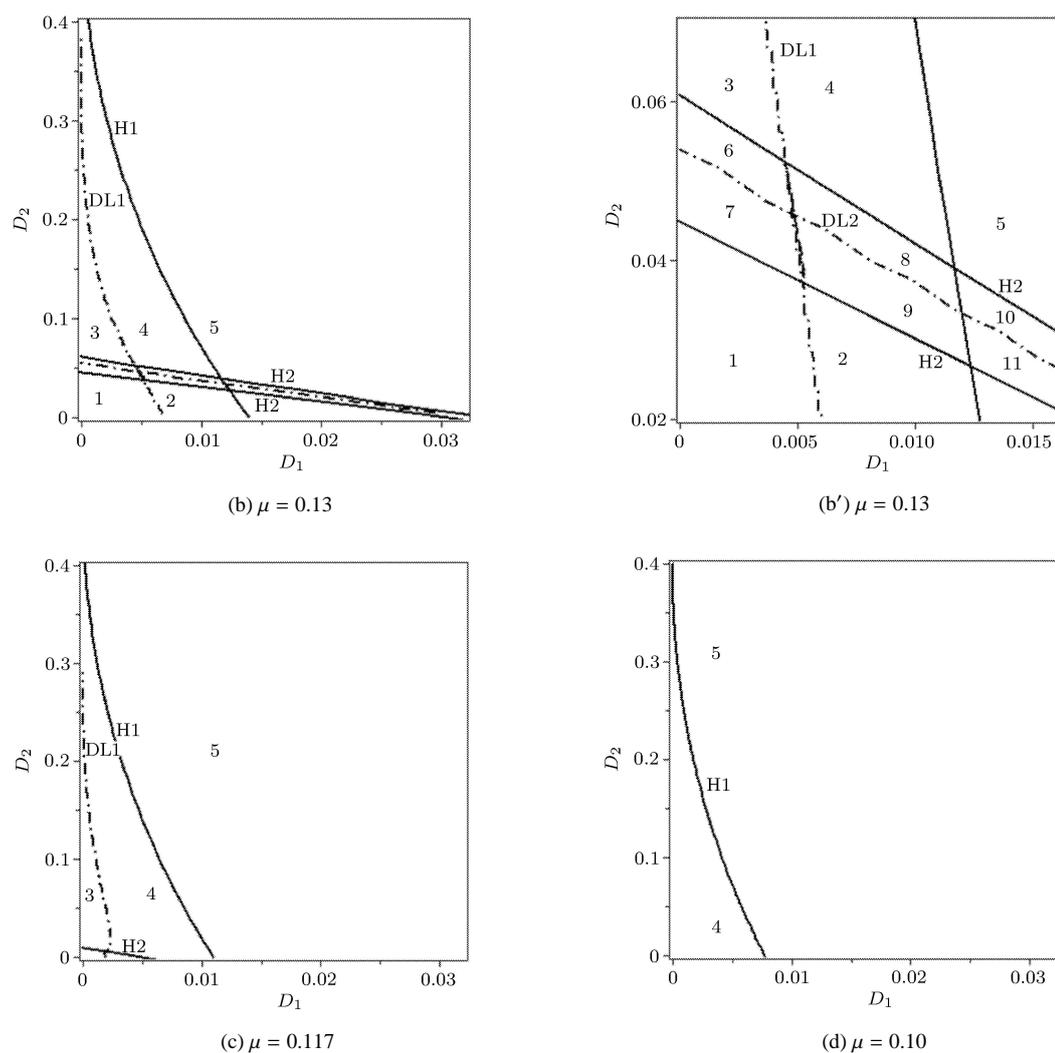


图2 不同阻尼下的转迁集(实线: 滞后集, 点划线: 双极限点集)(续)

Fig. 2 Transition sets for different damping coefficients (Solid lines: hysteresis point sets, Dash-dotted lines: double limit point sets) (continued)

非空转迁集将参数平面分成若干区域. 根据奇异性理论, 同一区域中不同点 (D_1, D_2) 所对应的概率密度曲线是定性相同的. 从各区域中取一点 (D_1, D_2) , 画出对应的 PDF 曲线图, 就能得到可能出现的各种定性不同的 PDF 曲线. 为方便对照, 图 2 中各区域均用数字进行了标注, 相应的概率密度曲线图见图 3, 共有 11 种. PDF 曲线出现多峰的参数区域是由滞后集 H1 和 H2(图中实线) 围成的, 在这些区域内系统呈多模响应. 区域 1~4 内, 响应是双模态的, 区域 6~9 内响应是三模态的. 图 3 中实线为理论结果, 星号线为 Monte-Carlo 数值模拟的结果, 二者吻合较好, 说明用本文方法分析随机 P 分岔是可行的.

滞后集两侧区域中, 概率密度曲线峰的数目不同, 因而当参数变化穿越滞后集时, 系统会发生随

机 P 分岔, 滞后集就是临界参数条件.

而双极限点集两侧, 对应概率密度曲线不同峰值的相对大小会发生改变. 在三峰 PDF 曲线所对应的参数范围内, 双极限点集 DL1 的右侧, 系统的稳态响应出现较大振动幅值的概率相对较大, 对应 PDF 曲线后 2 个峰值比较高, 如图 3 中 (h) 和 (k) 所示. 在 DL1 曲线的左侧, 系统的振动幅值明显只集中在较小的振幅附近, 如图 3(f) 和图 3(g) 所示. 同样在双峰 PDF 曲线所对应的参数范围内, DL1 曲线的左侧, 系统稳态响应振动幅值也只集中在较小振幅附近, 如图 3(a) 和图 3(c) 所示; DL1 曲线右侧, 系统的稳态响应出现较大振动幅值的概率相对较大, 如图 3(b) 和图 3(d) 所示. PDF 曲线各峰值的相对高度发生变化, 说明系统稳态响应的定性特性发生了变化^[17], 这也应属于 P 分岔的范畴, 此时双极限点集即为临

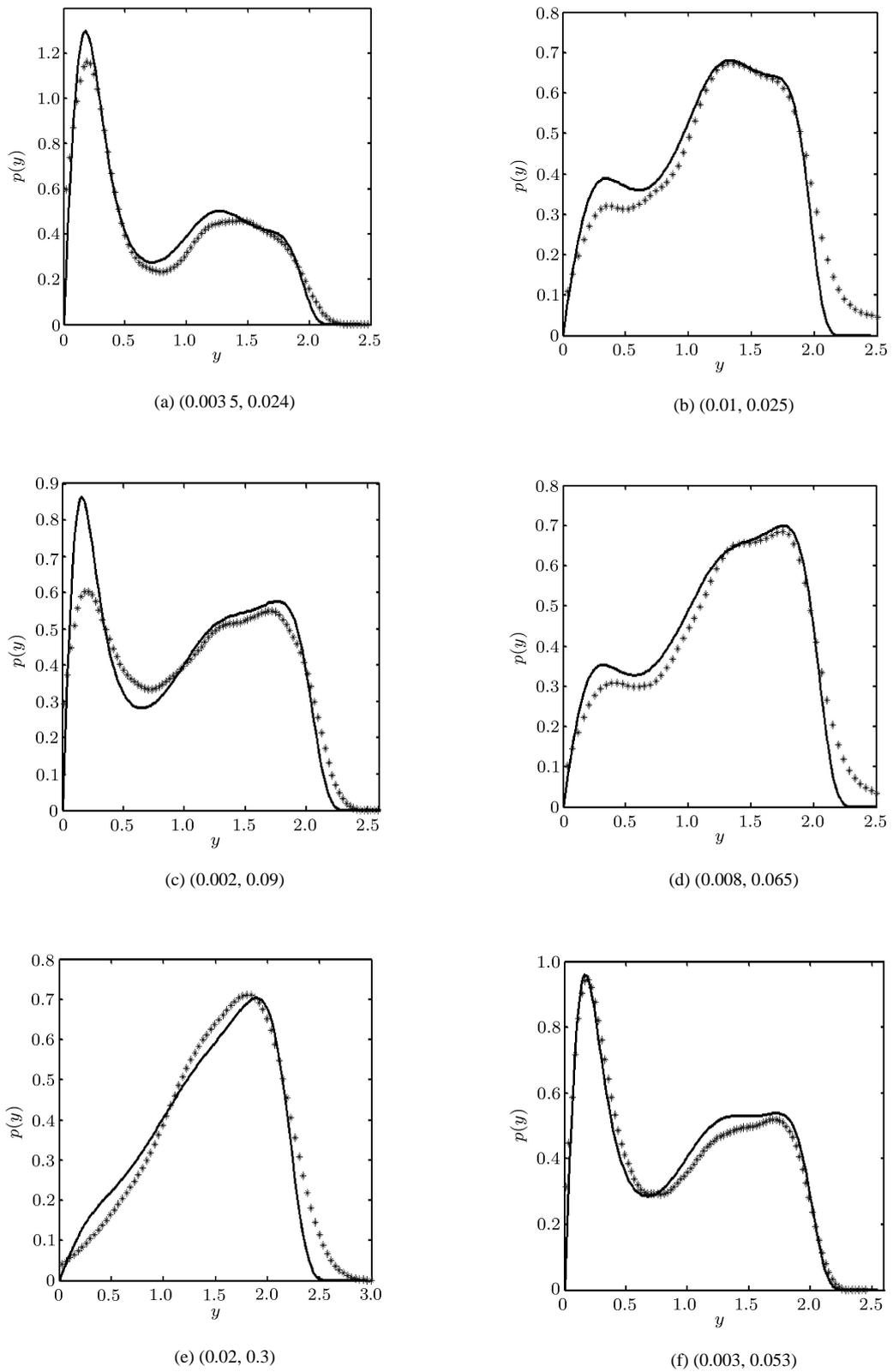


图 3 分岔图 ($\mu = 0.13$) (实线: 理论解, 星号线: 数值解)

Fig. 3 Bifurcation diagrams ($\mu = 0.13$) (Solid lines: theoretical solution, Star lines: numerical solution)

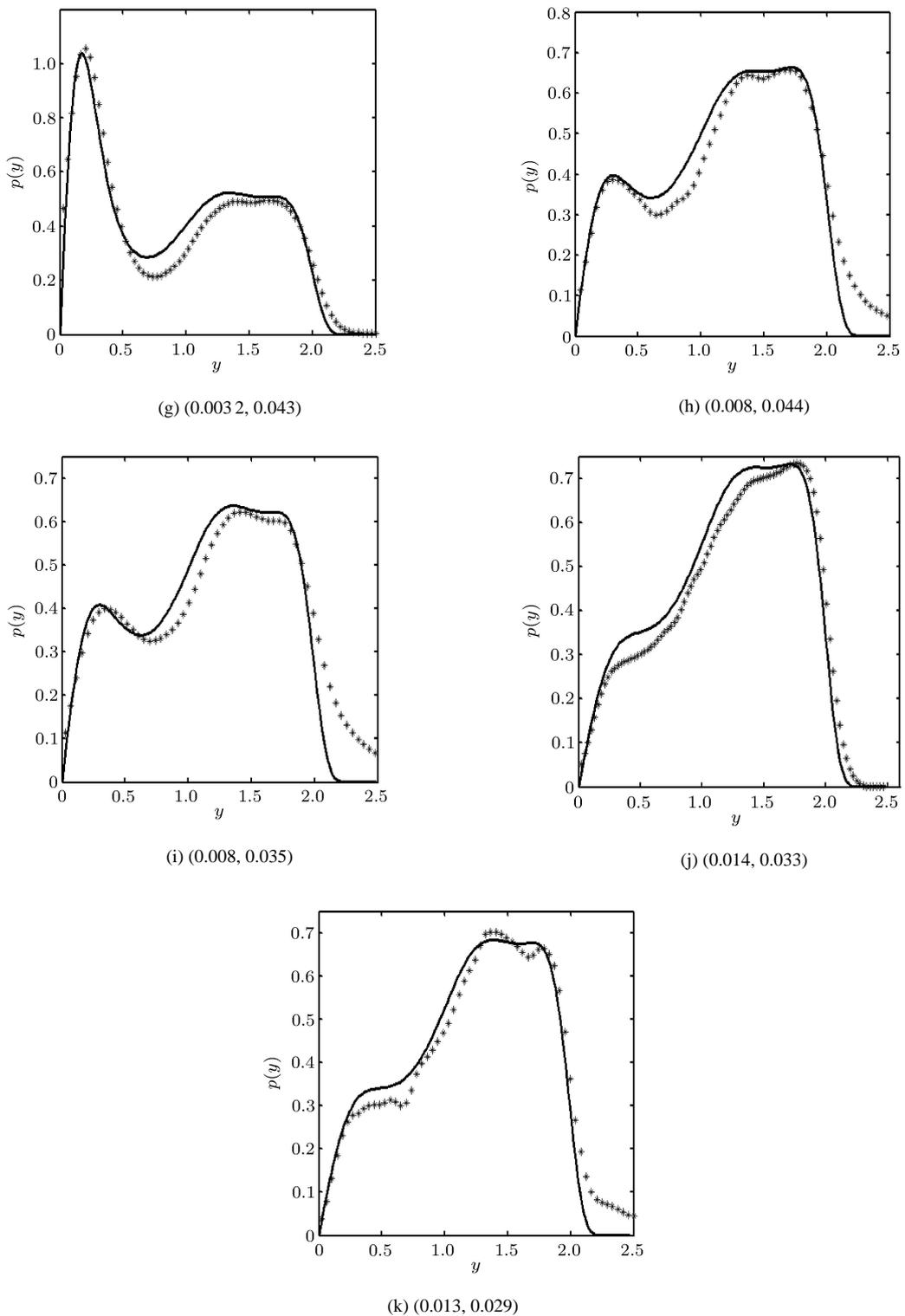


图 3 分岔图 ($\mu = 0.13$) (实线: 理论解, 星号线: 数值解) (续)

Fig. 3 Bifurcation diagrams ($\mu = 0.13$) (Solid lines: theoretical solution, Star lines: numerical solution) (continued)

界参数条件.

以上分析表明, 在所讨论参数的变化范围内, 3 个参数的变化能产生 11 种定性不同的 PDF 曲线. 只要适当选择参数, 就可使系统的 PDF 曲线呈现图 3

中任意期望的 11 种模式. 因此, 上述结果对此类系统的 PDF 设计和控制有直接的指导意义.

参数对 P 分岔的影响, 还体现在图 2 中各区域的位置、大小的变化. 随着阻尼系数 μ 的减小, 单模

响应区域 5 扩大,而多模响应区域减小,并向 D_1 和 D_2 减小的方向移动。 D_1 和 D_2 的影响以下分情况讨论。

$\mu = 0.15$ 时,系统 (1) 对应的确定性系统只有一个吸引子:零平衡点,2 种噪声激励下系统的转迁集曲线如图 2(a)。尽管确定性系统是单稳态的,但随机激励能激发出系统的多模态响应。 D_1 和 D_2 在原点附近时,响应是单模态的,系统运动出现在平衡点附近概率较大; D_1 和 D_2 适当大小时,响应是双模态或三模态的; D_1 和 D_2 较大时,响应又变为单模态的。

$\mu = 0.13$ 时,系统 (1) 对应的确定性系统有 2 个吸引子:零平衡点和具有较小幅值的极限环,2 种噪声激励下系统的转迁集曲线如图 2(b)。此时由于确定性系统是双稳态的,较小强度的随机激励就可以激发双模态响应,但只有噪声强度较大时三模态响应才会出现,当强度足够大时响应又变为单模态的。

$\mu = 0.117$ 时,系统 (1) 对应的确定性系统有 3 个吸引子:零平衡点和 2 个稳定的极限环,2 种噪声激励下系统的转迁集曲线如图 2(c)。此时确定性系统是三稳态的,因而小的随机激励就可以激发三模态响应,但与前两种情况比,三模态响应区域已变小。噪声强度增大时,响应先变为双模态再变成单模态。

$\mu = 0.10$ 时,系统 (1) 对应的确定性系统有 2 个吸引子:零平衡点和较大幅值的极限环,2 种噪声激励下系统的转迁集曲线如图 2(d)。此时转迁集曲线只存在滞后集 H1。在强度较小的随机激励下,响应是双模态的;强度较大的随机激励下,响应是单模态的;不会出现三模态响应。

通过以上分析可见,确定性系统存在多稳态时,较小的随机激励即可激发多稳态之间的跃迁,使得系统呈现多模态响应。值得注意的是,对应确定性系统不存在多稳态时,适当大小随机激励仍可激发多模态响应,如图 2(a) 即 $\mu = 0.15$ 时的情况。这是因为随机激励的存在使得多模态参数区域向阻尼增大的方向移动的结果。这一现象对于多稳态工程系统的临界参数(如高速列车临界速度)的确定有重要的指导作用。

3 结论

对加性和乘性高斯白噪声激励下三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔现象进行了研究,讨论了系统阻尼系数 μ 和激励噪声强度 D_1 , D_2 的影响,得到以下结论:

(1) 奇异性理论可用于 P 分岔参数条件的求解。视稳态概率密度 p_s 为分岔参数,响应幅值 y 为状态变量,随机 P 分岔的临界参数条件可通过计算转迁集得到。

(2) 在系统稳态概率密度函数曲线出现多峰的参数范围内,阻尼系数 μ 和噪声强度 D_1 , D_2 的变化,可以导致稳态概率密度曲线各峰值的相对大小发生变化,从而引起系统行为的定性变化。这种现象也属于随机 P 分岔的研究范畴。

(3) 阻尼系数 μ 和噪声强度 D_1 , D_2 都能诱导系统发生随机 P 分岔,系统稳态概率密度曲线峰的数目在 1~3 间变化。

参 考 文 献

- 1 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003 (Zhu Weiqiu. Nonlinear Stochastic dynamics and control: Hamilton theory system frame. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 2 朱位秋, 应祖光. 拟哈密顿系统非线性随机最优控制. 力学进展, 2013,43(1): 39-55 (Zhu Weiqiu, Ying Zuguang. Advances in research on nonlinear stochastic optimal control of quasi-hamiltonian systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 39-55 (in Chinese))
- 3 刘先斌. 随机力学系统的分叉行为与变分方法研究.[博士论文]. 成都: 西南交通大学 1995 (Liu Xianbin. Stochastic bifurcation behavior of mechanical systems and variational method. [PhD Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 1995 (in Chinese))
- 4 Huang ZL, Zhu WQ. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under bounded noise excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 2(254): 245-267
- 5 Huang ZL, Zhu WQ. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under combined harmonic and white-noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 2(238): 233-256
- 6 Wu YJ, Zhu WQ. Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and wide-band noise excitations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008(130)
- 7 陈林聪, 朱位秋. 谱和与宽带噪声联合激励下含分数导数型阻尼的 Duffing 振子的平稳响应. 应用力学学报, 2010, (3): 517-521 (Chen Lincong, Zhu Weiqiu. Stationary response of duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and wide band noise excitations. *Journal of Applied Mechanics*, 2010, (3): 517-521 (in Chinese))
- 8 Chen LC, Zhu WQ. Stochastic jump and bifurcation of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, (46): 1324-1329
- 9 Zhu WQ, Wu QT, Lu MQ. Jump and bifurcation of duffing oscillator under narrow-band excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(1): 73-81
- 10 Zhu WQ, Lu MQ, Wu QT. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow—band excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 165(2): 285-304

- 11 Davis HG, Liu Q. The response probability density function of a Duffing oscillator with random narrow band excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 139: 1-8
- 12 邢真慈, 徐伟, 戎海武等. 有界噪声激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统的响应. *物理学报*, 2009, (2): 824-829 (Xing Zhenci, Xu Wei, Rong Haiwu, et al. Response to stochastic Mathieu-Duffing system with time delay state feedback under bounded noise excitation. *Acta Phys Sin*, 2009, (2): 824-829 (in Chinese))
- 13 戎海武, 王向东, 徐伟等. 窄带随机噪声作用下 Duffing 振子的双峰稳态概率密度. *物理学报*, 2005, 54(6): 2557 (Rong Haiwu, Wang Xiangdong, Xu Wei, et al. On double-peak probability density functions of a Duffing oscillator under narrow-band random excitations. *Acta Phys Sinica*, 2005, 54(6): 2557 (in Chinese))
- 14 戎海武, 王向东, 孟光等. 谐和与随机噪声联合作用下 Duffing 振子的双峰稳态密度. *应用数学和力学*, 2006, (11): 1373-1379 (Rong Haiwu, Wang Xingdong, Meng Guang, et al. On double peak probability density functions of a duffing oscillator to combined deterministic and random excitations. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, (11): 1373-1379 (in Chinese))
- 15 顾仁财, 许勇, 郝孟丽. Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-Van der Pol 振子的随机分岔. *物理学报*, 2011, 60(6): 060513 (Gu Rencai, Xu Yong, Hao Mengli. Stochastic bifurcations in Duffing-Van der Pol oscillator with Lévy stable noise. *Acta Phys Sin*, 2011, 60(6): 060513 (in Chinese))
- 16 Xu Y, Gu RC, Zhang HQ, et al. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise. *Physical Review E* 83, 2011, 056215
- 17 Zakharova A, Vadivasova T, et al. Stochastic bifurcations and coherence-like resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator. The American Physical Society. *Physical Review E* 81, 2010, 011106
- 18 Golubitsky M, Schaeffer DG. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory I*. New York: Springer, 1985

(责任编辑: 周冬冬)

STOCHASTIC P-BIFURCATION OF TRI-STABLE VAN DER POL-DUFFING OSCILLATOR¹⁾

Hao Ying Wu Zhiqiang²⁾

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract This paper aims to investigate the stochastic P-bifurcations in the tri-stable Van der Pol-Duffing oscillator with additive and multiplicative Gauss noise. By using the stochastic averaging method, the stationary probability density function of amplitude is obtained. Then based on the singularity theory of the deterministic system, the explicit parameter conditions for P-bifurcation are deduced, and eleven types of qualitatively different probability density curves are founded. Finally the effects of three coefficients, one for linear damping and two for random excitation strength, are discussed. The results are verified by Monte-Carlo numerical simulations. The method used here is also suitable for other systems' P-bifurcation analysis.

Key words stochastic P-bifurcation, probability density function, singularity theory

Received 4 June 2012, revised 29 September 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172198), Ministry of Education Found for the Dotroal (2009003211005) and the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-15-0247).

2) Wu Zhiqiang, professor, research intrests: nonlinear vibration, bifurcation and chaos; vibration and control. E-mail: zhiqwu@tju.edu.cn