

研究简报

六边形蜂窝等效面外剪切模量预测及其尺寸效应¹⁾张卫红²⁾ 段文东 许英杰 朱继宏

(西北工业大学机电学院, 西安 710072)

摘要 给出了预测六边形蜂窝材料等效剪切模量及其尺寸效应的圆筒扭转力学模型和扭转能量法, 建立了等效面外剪切模量 G_{13} 相对于材料体分比 v 、周向单胞数 n 、圆筒半径 r 和单胞层数参数 m 变化的解析表达式; 同时将扭转能量法、有限元数值模拟计算和 G-A 经典细观力学方法进行了比较, 从理论上揭示并验证了尺寸效应的存在性. 结果表明, 当蜂窝体胞尺寸相对结构尺寸无穷小时, 预测结果趋近于细观力学方法的结果. 此外, 利用周期性蜂窝材料的结构对称特性, 使用体胞子结构有限元计算模型进行等效面外剪切模量及其尺寸效应的预测, 在不影响计算结果的前提下极大地提高了计算效率.

关键词 六边形蜂窝材料, 圆筒扭转力学模型, 等效面外剪切模量, 尺寸效应, 扭转能量法, G-A 细观力学方法.

中图分类号: V214.6 **文献标识码:** A **DOI:** 10.6052/0459-1879-12-073

引 言

六边形蜂窝材料因其比强度和比刚度高, 制造工艺稳定, 在航空航天轻质夹芯结构技术中得到广泛应用. 如图 1 所示, 夹芯结构通常由波纹、褶皱或者开孔轻质材料和上下面板组成, 其中夹芯主要承担剪切载荷、上下面板主要承受弯曲载荷.

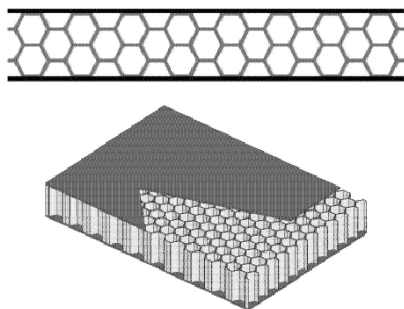


图 1 周期性蜂窝材料

Fig. 1 Periodic hexagonal material

目前, 国内外学者对蜂窝材料的力学行为已开展了大量研究工作. 早期的蜂窝夹层结构分析模型, 如 Kelsey 等^[1] 使用均匀化方法及蜂窝体内应力与应变分布的简化假设, 计算给出了蜂窝面外剪切模量的上下限. Gredia^[2] 采用有限元方法研究了六边形体胞的壁厚对面外等效剪切模量的影响. Meraghni 等^[3] 将层合板理论应用到蜂窝结构中, 给出一种面

外等效模量的计算方法. Gibson 等^[4] 考虑了孔壁的轴向变形和弯曲变形, 提出 G-A 细观力学方法, 计算了小体分比情况下蜂窝结构的面外剪切模量. 然而, 以上工作均无法反映材料体胞的尺寸效应.

图 2 为本文提出的周期性六边形蜂窝受扭圆筒结构模型及剖面示意图, 用于研究等效面外剪切模量及其尺寸效应. 假设周向单胞数 n 发生变化时, 图 2 中结构的宏观尺寸、组成宏观结构的体胞构型和材料体分比保持恒定. 可以预见, 当材料体胞尺寸改变时, 宏观结构的等效面外剪切模量以及加载后的力学响应会随之发生变化. Onck 等^[5] 认为造成尺寸效应的原因, 一是由于体胞尺寸的变化引起试件边界上多孔材料的体胞壁的约束状况发生了变化, 二是试件尺寸的变化改变了试件边界上表面体胞的数量与分布状况. Lestari 等^[6] 也从动力学响应角度提出蜂窝夹芯梁结构的等效杨氏模量和剪切模量的逆向求解方法. 证实当体胞尺寸和结构尺寸可比时结构存在尺寸效应. Tantikom 等^[7] 通过周期排列圆孔形体胞结构的压缩实验研究, 也证实了尺寸效应的存在以及对等效杨氏模量的影响. 戴高明等^[8] 提出了一种研究周期性多孔材料等效弹性模量及其尺寸效应的弯曲能量计算模型. 近期, 张卫红等^[9] 提出了揭示周期性多孔圆筒尺寸效应的扭转模型及相应的有限元数值模拟方法; 同时使用体胞子结构进行分

2013-01-06 收到第 1 稿, 2013-01-08 收到修改稿.

1) 国家重点基础研究发展计划 (2011CB610304) 和国家自然科学基金 (10925212) 资助项目.

2) 张卫红, 教授, 主要研究方向: 结构优化设计. E-mail: zhangwh@nwpu.edu.cn

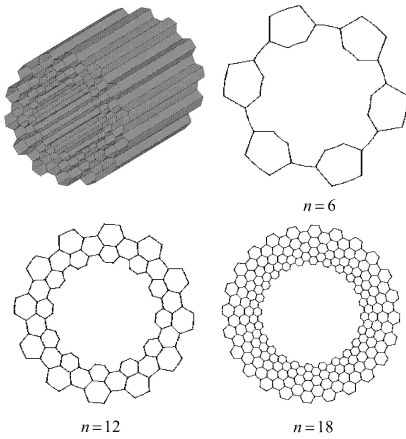


图 2 周期性六边形蜂窝圆筒模型及其尺寸效应示意图

Fig. 2 Periodic hexagonal honeycomb cylinder model and schematic illustration of size effect

析计算, 极大地提高了计算效率. 本文在上述工作的基础上, 开展了扭转能量法预测周期性六边形蜂窝材料等效剪切模量及其尺寸效应的研究.

1 计算等效剪切模量的扭转能量法简介

根据扭转理论^[9], 长度为 L 的等截面圆筒扭转应变能表示为

$$U_t = \int_0^L \left[\frac{1}{2G_s} \left(\frac{T}{I_p} \right)^2 \int_A r^2 dA \right] dx \quad (1)$$

式中, T 为扭矩, G_s 为固体材料本身的剪切模量, I_p 为圆筒截面的极惯性矩. 根据极惯性矩的定义, 式 (1) 可简化为

$$U_t = \frac{T^2}{2} \int_0^L \frac{1}{G_s I_p} dx \quad (2)$$

对于等效圆筒结构, 对应的扭转应变能为

$$U_t = \frac{T^2 L}{2G^H I^H} \quad (3)$$

式中, G^H 为结构的等效剪切模量, 联合式 (2) 和式 (3) 可得 G^H 表达式为

$$G^H = \frac{L}{I^H \int_0^L \frac{1}{G_s I_p} dx} = \frac{G_s L}{I^H \int_0^L \frac{1}{I_p} dx} \quad (4)$$

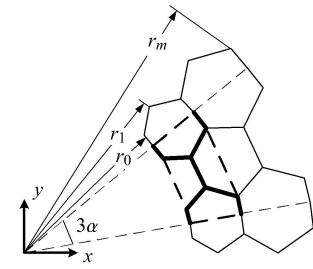
2 蜂窝圆筒扭转力学模型与几何模型参数的确定

为了建立等效剪切模量与周向单胞数 n 、体胞层数 m 、圆筒内外径 r 和材料体分比 v 等参数的物理关系, 需要给出不同参数下循环对称周期性六边形

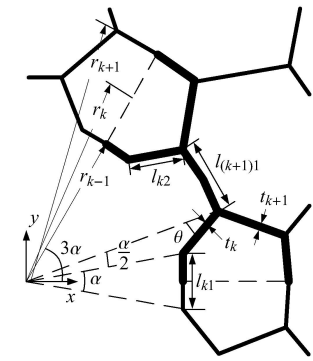
圆筒的几何特征参数表达式. 为此, 给出以下假设:

- (1) 假设每个体胞的体分比与材料的总体分比相同;
- (2) 假设圆筒内六边形蜂窝构型随着周向单胞数 n 、体胞层数 $m/2$ (其中 m 为偶数) 与圆筒内外径 r 同时增大, 最终趋近于平面正六边形蜂窝结构.

图 3 所示为组成六边形蜂窝圆筒的第 k 层蜂窝, 假设单胞沿径向排列层数为 $m/2$, 一周所含单胞个数为 n . 第 k 层蜂窝边长可用 l_{k1} 和 l_{k2} 度量, 其中 l_{k1} 沿周向对应的圆心角为 α . 为保证其近似满足正六边形蜂窝结构特点, 需满足条件: (1) 单胞沿周向对应的圆心角为 3α ; (2) 边 l_{k2} 沿周向对应的圆心角为 $\alpha/2$; (3) 角度 $\theta = \pi/6$.



(a)



(b)

图 3 圆筒六边形蜂窝构型及参数

Fig. 3 Configuration and parameters of cylinder hexagonal honeycomb

因此, 圆筒六边形蜂窝构型存在以下关系

$$3\alpha = 2\pi/n \quad (5)$$

$$l_{k2} \sin \theta = r_{k-1} \sin(\alpha/2) \quad (6)$$

$$r_k = r_{k-1} \cos(\alpha/2) + l_{k2} \cos \theta \quad (7)$$

联立以上 3 式得到如下关系式

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{6}\right) \quad (8)$$

该式说明当 n 确定时, r_k/r_{k-1} 为一定值, 此时, 各蜂窝层半径以等比规律排列, 其公比为

$$q = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{6}\right) \quad (9)$$

则圆筒内外半径满足关系式

$$\frac{r_m}{r_0} = q^m = \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{6}\right)\right]^m \quad (10)$$

由式 (10) 可知, 确定几何模型的 3 个参数为: 一周所含单胞数 n 、圆筒内外径比 r_m/r_0 和单胞层数参数 m . 当 $r_0 \rightarrow r_m$ 或 $n \rightarrow \infty$ 时圆筒六边形蜂窝退化为平面正六边形蜂窝结构, 满足假设条件 (2).

设第 k 层蜂窝壁厚为 t_k , 则第 k 层蜂窝的体分比可表示为

$$v_k = \frac{(l_{k1} + l_{(k+1)1})t_k/2 + 2l_{k2}t_k}{(\pi r_k^2 - \pi r_{k-1}^2)3\alpha/(2\pi)} = \frac{t_k}{r_{k-1}} \frac{\alpha(1+q) + 8 \sin(\alpha/2)}{3\alpha(q^2 - 1)} \quad (11)$$

因为 α 和 q 均为 n 的函数, 令

$$\phi(n) = \frac{\alpha(1+q) + 8 \sin(\alpha/2)}{3\alpha(q^2 - 1)} \quad (12)$$

则式 (11) 可表示为

$$v_k = \frac{t_k}{r_{k-1}} \phi(n) \quad (13)$$

各层蜂窝体分比应等于材料体分比, 因此

$$v_k = v_{k-1} = \cdots = v_1 = v, \quad k = 1, 2, \cdots, m \quad (14)$$

将式 (13) 代入式 (14), 得到以下壁厚关系式

$$t_0 = \frac{vr_0}{\phi(n)q}, \quad t_k = t_{k-1}q = t_0q^k = \frac{vr_0q^k}{\phi(n)} \quad (15)$$

3 扭转能量法预测公式的推导

要运用扭转能量法预测六边形蜂窝结构的等效剪切模量, 关键问题是求出式 (4) 中截面极惯性矩的积分 $\int_0^L (1/I_p) dx$. 对于面外模量 G_{13} 的模型, 材料沿轴向均匀分布, 各截面相同所以有

$$\int_0^L \frac{1}{I_p} dx = \frac{L}{I_p} \quad (16)$$

材料局部梁的截面极惯性矩^[10]可表示为

$$I \approx 4A^2t/S \quad (17)$$

其中, A 表示局部梁所围的圆筒的面积, t 表示梁的壁厚, S 表示梁的长度.

则对于第 k 层上的梁长度 l_{k1} 和 l_{k2} 有

$$t_{k1} = t_{k2} = t_k = vr_{k-1}/\phi(n)w, \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

$$t_0 = t_{m+1} = 0$$

$$A_{k1} = \alpha r_k^2/2 = \pi r_k^2/(3n), \quad A_{k2} = r_k r_{k-1} \sin(\alpha/2)/2$$

$$S_{k1} = \alpha r_k = 2\pi r_k/(3n), \quad S_{k2} = 2r_{k-1} \sin(\alpha/2)$$

将上式代入式 (17), 得到第 k 层的梁 l_{k1} 和 l_{k2} 的截面极惯性矩为

$$I_{k1} = \pi r_k^3(t_k + t_{k+1})/(3n) \quad (18)$$

$$I_{k2} = \frac{vr_0^4 q^{4k-2}}{2\phi(n)} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (19)$$

则整个圆筒蜂窝模型的截面极惯性矩为

$$I = n \sum_{k=0}^m I_{k1} + 2n \sum_{k=1}^m I_{k2} = \frac{\pi vr_0^4}{3\phi(n)} \frac{(1 - q^{4m})(1 + q^3)}{1 - q^4} + \frac{nvr_0^4 \sin(\alpha/2)}{\phi(n)} \frac{q^2(1 - q^{4m})}{1 - q^4} \quad (20)$$

将上式代入式 (4), 得到

$$G_{13}^H = \frac{G_s I}{I^H} = 2v \frac{\pi + \pi q^3 + 3q^2 \sin(\pi/3n)}{3\pi\phi(n)(q^4 - 1)} \quad (21)$$

由式 (9) 知, q 是 n 的函数, 所以令

$$\varphi(n) = \frac{\pi + \pi q^3 + 3q^2 \sin(\pi/3n)}{3\pi\phi(n)(q^4 - 1)} \quad (22)$$

则式 (21) 可表示为

$$G_{13}^H = 2v\varphi(n) \quad (23)$$

4 算例

为了提高分析求解效率, 考虑受扭圆筒模型的循环周期特点, 只需研究周向的一个体胞子结构 (如图 4 所示), 对其加上周期性对称约束 (即沿轴向 2 个侧面的对应点具有完全相同的边界条件和自由度) 和载荷条件, 即可计算出整个结构的扭转变形。

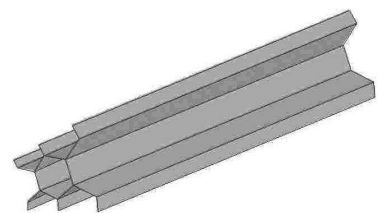


图 4 体胞子结构简化模型

Fig. 4 Simplified substructure model

下面以面外剪切模量 G_{13} 的计算为例, 对细观力学方法和扭转能量法的预测结果与有限元数值模拟结果进行比较和分析. 采用的参数如下: 扭矩 $T = 2 \text{ MN} \cdot \text{m}$, 外径 $r_m = 100 \text{ m}$ (外径固定, 改变内径), 圆筒长度 $L = 1000 \text{ m}$, 材料弹性模量 $E_x = 3.5 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.34$.

由第 2 节中内容可知, 确定几何模型的参数有周向单胞数 n 、圆筒内径 r_0 、单胞层数参数 m 和体分比 v . 所以本文主要研究以上 4 个参数对等效面外剪切模量 G_{13}^H 的影响.

由第 2 节中式 (9) 和式 (10) 可知, 在周向单胞数 n 、圆筒内径 r_0 和单胞层数参数 m 这 3 个变量中, 只有 2 个自由变量. 本节通过保持 3 个参数中某一个参数不变的方法, 研究 G_{13}^H 随另外 2 个参数变化时的尺寸效应. 从第 3 节中的扭转能量法预测式 (23) 可以看出, 等效剪切模量 G_{13}^H 不随单胞层数参数 m 的变化而变化, 所以假设单胞层数参数 $m = 2$ 恒定, 研究周向单胞数 n 或圆筒内径 r_0 对等效剪切模量 G_{13}^H 的影响, 计算结果如图 5 所示.

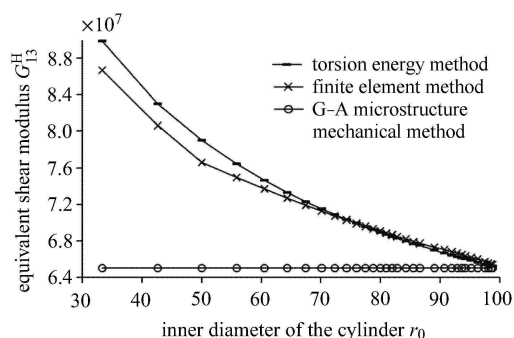


图 5 圆筒内径 r_0 对等效剪切模量 G_{13}^H 的影响

Fig. 5 Influence of inner diameter of the cylinder r_0 on G_{13}^H

可以看出, 扭转能量法预测结果和有限元数值模拟结果吻合得很好, 两者均随 r_0 或 n 的增加呈单调减小的变化趋势, 并最终趋近于细观力学方法的预测结果. 计算结果很好地体现出了周向单胞数 n 或圆筒内径 r_0 对等效剪切模量 G_{13}^H 的影响, 体现出等效剪切模量 G_{13}^H 随这 3 个参数变化的尺寸效应.

保持几何模型不变 (即周向单胞数 n 、圆筒内径 r_0 和单胞层数参数 m 不变), 仅改变体分比 v , 则得到图 6 所示曲线.

可以看出, 3 种方法的结果趋势保持一致, G_{13}^H 随体分比 v 都成线性关系, 并且扭转能量法预测结

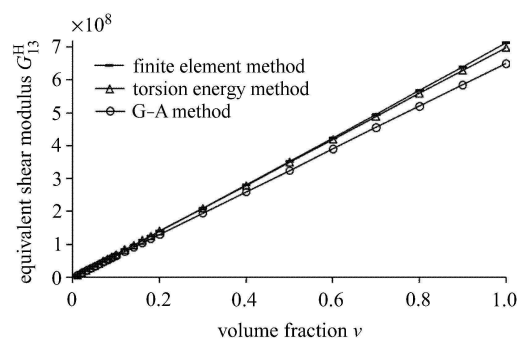


图 6 体分比 v 对 G_{13}^H 的影响

Fig. 6 Influence of volume fraction v on G_{13}^H

果和有限元数值模拟结果比较接近, 略大于细观力学法的预测结果.

此外, 本文研究了周向单胞数 n 和材料体分比 v 一起变化时, 对相对等效剪切模量 G_{13}^H 的影响, 并用等效剪切模量 G_{13}^H 与细观力学法求得的等效剪切模量 G_{13}^H 的比来表示, 如图 7 所示.

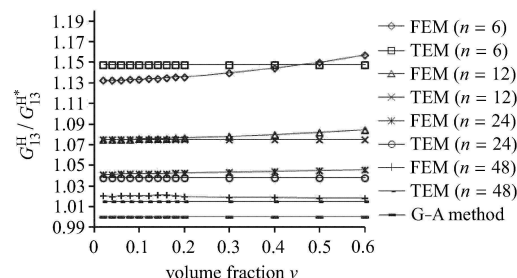


图 7 周向单胞数和体分比对相对等效剪切模量的影响

Fig. 7 Influences of number of cells in circumference and volume fraction on equivalent shear modulus

由图 7 可以看出, 材料体分比 v 比较小时, 体分比 v 的改变对有限元数值模拟结果影响很小, 可以忽略, 此时, 只需考虑周向单胞数 n 的影响. 而随着材料体分比 v 的增大, 有限元模型渐渐不适合壳单元的条件, 体分比 v 的变化对有限元数值模拟结果的影响不可忽略, 但随着周向单胞数 n 的增大, 体分比 v 的影响会逐渐较小.

5 总结

本文提出了预测周期性六边形蜂窝材料等效面外剪切模量及其尺寸效应的扭转模型与扭转能量法, 建立了等效面外剪切模量相对微结构构型几何特征参数的解析表达式, 提出了循环对称圆筒扭转通用胞子结构的计算模型, 使用扭转能量法预测、有限元数值模拟和细观力学法预测的方法很好

地体现出等效面外剪切模量 G_{13}^H 随周向单胞数 n 、圆筒内径 r_0 、单胞层数参数 m 和材料体分比 v 的变化,并体现出随周向单胞数 n 变化的尺寸效应。从结果的比较可以看出,细观力学方法不能预测蜂窝材料等效面外剪切模量的尺寸效应,仅能给出材料体胞尺寸相对材料宏观尺寸很小时的极限值;而扭转能量法可以很好地预测出等效面外剪切模量随周向单胞数 n 变化的尺寸效应,并且和有限元数值模拟结果很好的吻合,体现了其正确性。

参 考 文 献

- 1 Kelsey S, Gellatly R, Clark B. The shear modulus of foil honeycomb cores. *Aircraft Engineering*, 1964, 30(10): 294-302
- 2 Gredia M. A finite element study of the transverse shear in honeycomb Core. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30(13): 1777-1788
- 3 Meraghni F, Desrumaux F, Benzeggagh ML. Mechanical behaviour of cellular core for structural sandwich panels. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1999, 30(6): 767-779
- 4 Gibson LJ, Ashby MF. Cellular Solids: Structure and Properties. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 5 Onck PR, Andrews EW, Gibson LJ. Size effects in ductile cellular solids. Part I: Modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 681-699
- 6 Lestari W, Qiao PZ, Song GB, et al. Evaluation of bending and shear moduli of sandwich structures by dynamic response based technique. In: Proceeding of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2003
- 7 Tantikom K., Aizawa T, Mukai T. Symmetric and asymmetric deformation transition in the regularly cell-structured materials Part I: Experimental study. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 2199-2210
- 8 戴高明, 张卫红. 周期性多孔材料等效拉伸模量的尺度效应研究. 中国科学 G 辑: 物理力学天文学, 2009, 39(7): 955-963 (Dai Gaoming, Zhang Weihong. Size effects of effective Young's modulus for periodic cellular materials. *Science in China (Series G: Physics, Mechanics & Astronomy)*, 2009, 39(7): 955-963 (in Chinese))
- 9 张卫红, 骆金威, 戴高明等. 周期性多孔材料等效剪切模量的一种简单计算方法与尺寸效应研究. 力学学报, 2011, 43(1): 144-153 (Zhang Weihong, Luo Jinwei, Dai Gaoming, et al. Numerical Predictions of Effective Shear Modulus and Size Effect for Periodic Cellular Materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(1): 144-153 (in Chinese))
- 10 Wang AJ, McDowell DJ. Optimization of a metal honeycomb sandwich beam-bar subjected to torsion and bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 2085-2099

(责任编辑: 周冬冬)

PREDICTIONS OF EFFECTIVE OUT-PLANE SHEAR MODULUS AND SIZE EFFECT OF HEXAGONAL HONEYCOMB¹⁾

Zhang Weihong²⁾ Duan Wendong Xu Yingjie Zhu Jihong

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract In this paper, a cylinder torsion model and a torsion energy method are proposed to predict equivalent out-plane shear modulus of hexagon cellular materials. An analytical expression for its size effect is constructed in terms of volume fraction(v), number of cells in circumference(n), radius of the hollow cylinder(r) and number parameter of cell layers(m). Comparisons are made among the results of torsion energy method, finite element numerical simulation and G-A microstructure mechanical method. The size effect is revealed and proved theoretically. Numerical results show that when the cell size trends to be infinitely small with regard to the size of the structure, predicted results approach those obtained by mesoscopic mechanics method. Due to the cyclic symmetry of periodic cellular materials, it is shown that the computing efficiency can be greatly increased by means of the substructure model.

Key words hexagonal honeycomb, torsion of cylinder model, effective shear modulus, size effect, torsion energy method, G-A microstructure mechanical method

Received 6 January 2013, revised 8 January 2013.

1) The project was supported by the National Basic Research Program (2011CB610304) and the National Natural Science Foundation of China (10925212).

2) Zhang Weihong, professor, research interests: structural optimization design. E-mail: zhangwh@nwpu.edu.cn