

圆环旋转黏性液体射流空间不稳定性研究¹⁾

阎凯²⁾ 宁智 吕明

(北京交通大学机械与电子控制工程学院, 北京 100044)

摘要 利用线性稳定性理论, 进行了液体黏性对不同旋转强度下圆环旋转液体射流空间不稳定性影响的研究. 在推导出的三维扰动下具有固体涡核型旋转速度分布的圆环旋转黏性液体射流色散方程的基础上, 针对中低速射流, 进行了类反对称模式与类对称模式下圆环旋转黏性液体射流的空间不稳定性分析. 研究表明, 对于旋转强度较大的圆环旋转液体射流, 液体黏性的增加, 不利于射流的破碎; 随着液体黏性的增加, 射流的特征频率和最不稳定波数减小. 然而, 对于旋转强度较小的圆环旋转液体射流, 液体黏性的增加, 有利于射流的破碎; 随着液体黏性的增加, 类反对称模式下射流特征频率先减小后增大, 类对称模式下射流特征频率增大; 随着液体黏性的增加, 类反对称模式下射流最不稳定波数先减小后增大, 类对称模式下射流最不稳定波数增大.

关键词 圆环旋转黏性液体射流, 固体涡核型旋转速度分布, 液体黏性, 液体旋转强度, 空间不稳定性

中图分类号: O358 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)04-0687-07

引言

液体射流是自然界和工程中广泛存在的现象, 对液体射流稳定性的研究不仅具有重要的理论意义, 而且也具有工程应用背景. 燃油射流分裂与雾化机理问题, 实际上就是射流稳定性问题. 早在 1959 年, Ponstein^[1] 就对圆环液体射流的稳定性问题进行了探讨. 近年来圆环旋转射流问题逐渐成为喷雾领域的研究热点^[2-8].

对于圆环液体射流, 研究者往往将液体黏性与液体旋转分开研究. 严春吉等^[9] 对圆环黏性液体射流线性稳定性问题进行了研究, 研究了液体黏性对圆环液体射流空间不稳定性影响, 研究表明液体的黏性阻碍圆环液体射流的破碎. 林玉静^[10] 对圆环无黏旋转液体射流线性稳定性问题进行了研究, 研究了自由涡核型旋转速度分布对圆环无黏液体射流时间不稳定性影响. Ashraf 等^[11-12] 对圆环无黏旋转液体射流线性稳定性问题进行了研究, 研究了自由涡核型旋转速度分布和固体涡核型旋转速度分布对圆环无黏液体射流时间不稳定性影响.

Sekav^[13] 首次研究了液体黏性对具有自由涡核型旋转速度分布的圆环旋转黏性液体射流时间不稳定性影响.

许多实验与数值模拟结果显示, 旋流雾化喷嘴

内部的液体速度呈自由涡核型旋转速度分布, 而在喷嘴外部的液体速度则呈固体涡核型旋转速度分布^[5-8].

对于具有固体涡核型旋转速度分布的圆环旋转液体射流稳定性问题的研究来说, 目前所做的工作基本上都是基于液体无黏的假设. 本文在同时考虑液体黏性与液体旋转的情况下, 对具有固体涡核型旋转速度分布的圆环旋转黏性液体射流稳定性问题进行研究, 研究液体黏性对不同旋转强度下圆环旋转液体射流空间不稳定性影响.

1 圆环旋转黏性液体射流的色散方程

图 1 给出的是柱坐标系 (r, θ, z) 下圆环旋转黏性液体射流示意图.

为了分析方便, 假定射流方向与 z 轴相反; 气液流体均为不可压缩牛顿流体; 射流液体内半径为 a , 外半径为 b , 液体厚度 $h = b - a$; 液体运动黏度为 ν , 气体为无黏流体; 气液界面处的表面张力为 σ ; 内部气体密度为 ρ_i , 外部气体密度为 ρ_o ; η_i 和 η_o 分别为液体内外面振幅; 液体两侧相位差为 ϕ . 对于环形液体射流, ϕ 可能近似为 0 或 π 两种相位. 当 ϕ 近似为 0 时, 圆环液体射流为类反对称模式 (para-sinusoidal mode), 当 ϕ 近似为 π 时, 圆环液体射

2011-07-11 收到第 1 稿, 2011-10-30 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (50876007) 和北京市自然科学基金 (3102024) 资助项目.

2) E-mail: yanqiaokai@gmail.com

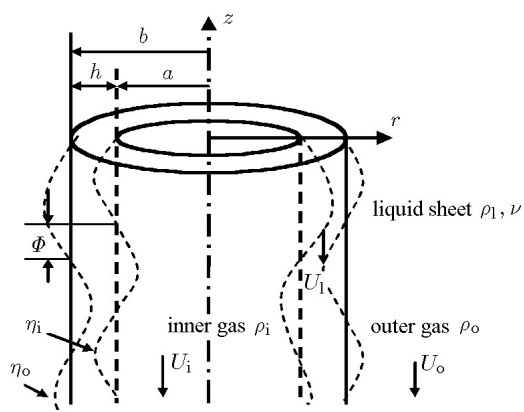


图 1 圆环旋转黏性液体射流示意图

Fig.1 Schematic of annular swirl viscous liquid sheet

流为类对称模式 (para-varicose mode)^[14].

射流初态设定为: 液体初速度 $\mathbf{U}_1 = (0, Ar, -U)$, 射流内部气体初速度 $\mathbf{U}_i = (0, 0, -U_{i0})$, 射流

外部气体初速度 $\mathbf{U}_o = (0, 0, -U_{o0})$. A 代表液体旋转角速度; r 为半径. 以液体厚度 h 为特征长度, h/U 为特征时间.

对于圆环旋转黏性液体射流和内、外部气体介质, 分别建立描述其运动特征的连续性方程、动量方程, 对方程进行扰动、线性化和无量纲化, 得到圆环旋转黏性液体射流的扰动控制方程. 在假设扰动为简正模态的条件下, 可得到射流控制方程的解 (射流的扰动速度与扰动压力以及射流内外部气体的扰动速度与扰动压力). 将射流控制方程的解代入到无量纲线性化射流边界条件后, 经整理得到如下齐次线性方程组

$$\mathbf{A}(\omega, k, m) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{X} = [c_{11}, c_{12}, e_{11}, e_{12}, d_{11}, d_{12}, d_{i1}, d_{o2}]^T$; $\mathbf{A}(\omega, k, m)$ 是如下所示的一个 8×8 矩阵, 矩阵中未表示出来的项在附录中给出.

$$\begin{bmatrix} I_{m+1}(l_1 B_h) & K_{m+1}(l_1 B_h) & I_{m-1}(l_2 B_h) & K_{m-1}(l_2 B_h) & -kReS_1(kB_h) & kReS_2(kB_h) \\ \frac{l_1}{Re} I'_{m+1}(l_1 B_h) & \frac{l_1}{Re} K'_{m+1}(l_1 B_h) & \frac{l_2}{Re} I'_{m-1}(l_2 B_h) & \frac{l_2}{Re} K'_{m-1}(l_2 B_h) & \Lambda_{2,5} & \Lambda_{2,6} \\ \Lambda_{3,1} & \Lambda_{3,2} & \Lambda_{3,3} & \Lambda_{3,4} & \Lambda_{3,5} & \Lambda_{3,6} \\ \Lambda_{4,1} & \Lambda_{4,2} & \Lambda_{4,3} & \Lambda_{4,4} & \Lambda_{4,5} & \Lambda_{4,6} \\ I_{m+1}(l_1 A_h) & K_{m+1}(l_1 A_h) & I_{m-1}(l_2 A_h) & K_{m-1}(l_2 A_h) & -kReS_1(kA_h) & kReS_2(kA_h) \\ \frac{l_1}{Re} I'_{m+1}(l_1 A_h) & \frac{l_1}{Re} K'_{m+1}(l_1 A_h) & \frac{l_2}{Re} I'_{m-1}(l_2 A_h) & \frac{l_2}{Re} K'_{m-1}(l_2 A_h) & \Lambda_{6,5} & \Lambda_{6,6} \\ \Lambda_{7,1} & \Lambda_{7,2} & \Lambda_{7,3} & \Lambda_{7,4} & \Lambda_{7,5} & \Lambda_{7,6} \\ \Lambda_{8,1} & \Lambda_{8,2} & \Lambda_{8,3} & \Lambda_{8,4} & \Lambda_{8,5} & \Lambda_{8,6} \\ 0 & 0 & \frac{2ikK'_m(kB_h)e^{-i\Phi}}{Q_o(kU_o + i\omega)^2}(k - Em + i\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{2,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2ikI'_m(kA_h)}{Q_i(kU_i + i\omega)^2}(k - Em + i\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中, 包含有 Reynolds 数 Re , 液体 Weber 数 We , 圆环液体射流内外气液密度比 Q_i, Q_o 以及射流旋转强度 E 等无量纲数为 $Re = \frac{Uh}{\nu}$, $We = \frac{\rho_l U^2 h}{\sigma}$, $Q_i = \frac{\rho_i}{\rho_l}$, $Q_o = \frac{\rho_o}{\rho_l}$, $E = \frac{Ah}{U}$. $\lambda^2 = Re(\omega + iEm - ik)$; $l_1^2 = k^2 + \lambda^2 + 2iERe$; $l_2^2 = k^2 + \lambda^2 - 2iERe$; $A_h = a/h$; $B_h = b/h$; I_m 和 K_m 分别为第一、二类 m 阶修正 Bessel 函数; $i = (-1)^{1/2}$; $k = k_r + ik_i$, k_r 为实波数, 与波长 λ_o 的关系为 $k_r = 2\pi/\lambda_o$, k_i 为扰动的空间增长率; $\omega = \omega_r + i\omega_i$, ω_r 为扰动的时间增长率, ω_i 为扰动频率; 实数 m 为角向模数, 表征扰动的角向变化。

方程组 (1) 为齐次线性代数方程组, 有非零解的条件是方程组系数行列式为零, 由此可得

$$|A(\omega, k, m)| = 0 \quad (2)$$

式 (2) 即为描述圆环旋转黏性液体射流自由表面扰动发展的色散方程。

2 色散方程的求解与模型的验证

工程中观察到的多数射流分裂具有时间上振动、空间上发展的特征, 因此本文采用空间模式对色散方程 (2) 进行数值求解, 得到了扰动增长率随流动参数和波数的关系。具体的求解过程是对于给定的波数和角向模数, 先在 ω_i 和 k_i 平面计算方程 (2) 左边的值, 找到近似满足方程的 ω_i 和 k_i 值, 然后将其作为求解色散方程的初值, 采用弦截法, 用 Mathematica 编写程序进行精确求解 [15]。

当 $k_i > 0$ 时, 初始扰动振幅 η_{i0} 和 η_{o0} 乘上因子 $e^{-k_i z}$, 故振幅 η_i 和 η_o 将随射流方向增大 (因为射流方向与 z 轴方向相反), 从而扰动变得不稳定。反之, 当 $k_i < 0$ 时, 振幅 η_i 和 η_o 将随射流方向衰减, 射流保持稳定 [16]。

图 2 给出的是在圆环液体射流无旋转, 即 $E = 0$ 的特殊情况下, 扰动增长率 k_i 随波数 k_r 的变化, 与文献 [17] 的计算结果一致, 从一定程度上说明了本文理论推导公式的正确性和数值计算程序的可靠性。

3 仿真结果与分析

本文利用所建模型进行圆环旋转黏性液体射流空间不稳定性分析, 在不同旋转强度下, 研究液体雷诺数 Re , 即液体黏性对射流最大扰动增长率、特征频率和最不稳定波数的影响。

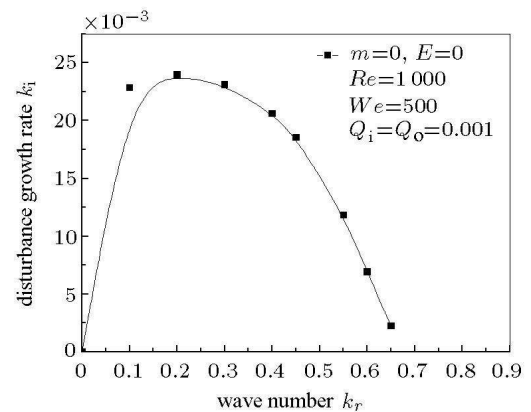


图 2 圆环黏性液体射流无旋转情况下扰动增长率随波数的变化

Fig.2 The variations of growth rate with wave number

本文针对中低速射流, 下文中算例选取流动参数如下: $A_h, U_i, U_o, Q_i, Q_o, We$ 分别为 4, 0, 0, 0.001, 0.001, 1000。

3.1 液体雷诺数 Re 对不同旋转强度下圆环旋转黏性液体射流最大扰动增长率的影响

在液体射流雾化过程中, 由于具有最大扰动增长率的扰动在整个射流破碎雾化过程中起主导作用, 因此在液体射流不稳定性分析中, 一般都是将关注点集中在最大扰动增长率上 [18]。下面在类反对称模式与类对称模式下, 着重分析在不同旋转强度时, 液体雷诺数 Re 对圆环旋转液体射流最大扰动增长率的影响。

图 3 给出的是在如前所述参数条件下, 类反对称模式和类对称模式下, 不同旋转强度时, 最大扰动增长率随 Re 数的变化。

从图 3 中可以看到, 液体黏性对不同旋转强度的圆环旋转液体射流最大扰动增长率具有完全不同

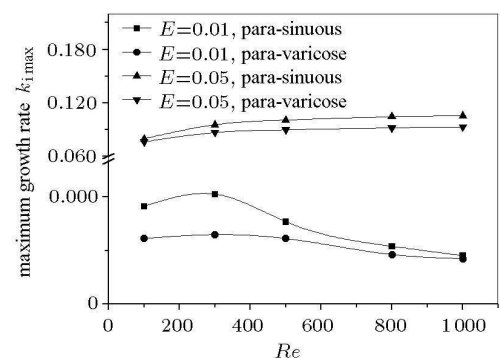


图 3 类反对称模式和类对称模式下最大扰动增长率随射流液体雷诺数 Re 的变化

Fig.3 The variations of maximum growth rate of para-sinusoidal and para-varicose mode with Re

的影响规律. 当旋转强度较大时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式和类对称模式的射流最大扰动增长率都减小. 当旋转强度较小时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式的射流最大扰动增长率先增大然后稍有减小; 类对称模式的射流最大扰动增长率增大. 说明液体黏性的增加, 不利于旋转强度较大的圆环旋转液体射流破碎, 而有利于旋转强度较小的圆环旋转液体射流破碎.

3.2 液体雷诺数 Re 对不同旋转强度下圆环旋转黏性液体射流特征频率的影响

最大扰动增长率对应的频率为射流的特征频率, 具有这个频率成分的扰动, 较之其他频率成分的扰动增长得更快 [18-19]. 下面在类反对称模式与类对称模式下, 分析液体雷诺数 Re 对不同旋转强度的圆环旋转液体射流特征频率的影响.

图 4 给出的是在如前所述参数条件下, 类反对称模式下, 不同旋转强度时, 射流特征频率随 Re 的变化.

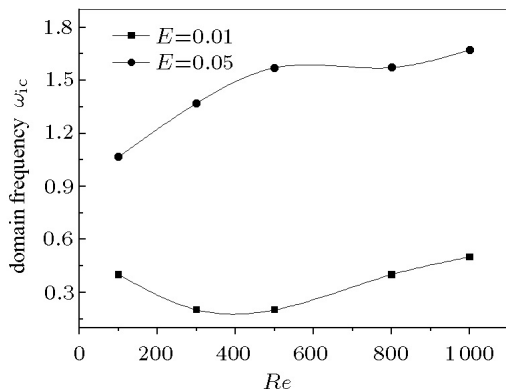


图 4 类反对称模式下射流特征频率随射流液体雷诺数 Re 的变化

Fig.4 The variations of domain frequency of para-sinusoidal mode with Re

从图 4 中可以看到, 在类反对称模式下, 液体黏性对不同旋转强度的圆环旋转液体射流特征频率具有完全不同的影响规律. 旋转强度较大的圆环旋转液体射流特征频率明显高于旋转强度较小的圆环旋转液体射流特征频率. 当旋转强度较大时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式下圆环旋转液体射流特征频率先缓慢减小, 当液体黏性增加到一定值时 (Re 减小到一定值时), 类反对称模式下圆环旋转液体射流特征频率减小速度加快. 当旋转强度较小时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式下圆环旋转液体射流特征频率先缓慢减

小, 当液体黏性增加到一定值时 (Re 减小到一定值时), 类反对称模式下圆环旋转液体射流特征频率反而出现增大的趋势.

图 5 给出的是在如前所述参数条件下, 类对称模式下, 不同旋转强度时, 射流特征频率随 Re 的变化.

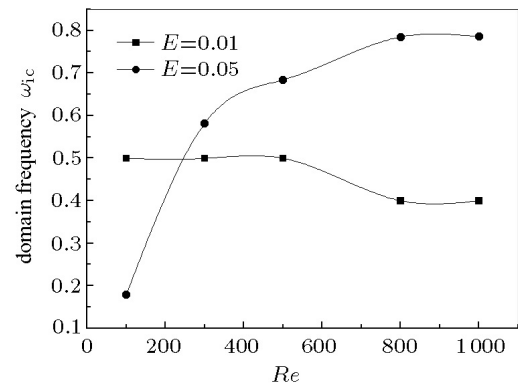


图 5 类对称模式下射流特征频率随射流液体雷诺数 Re 的变化

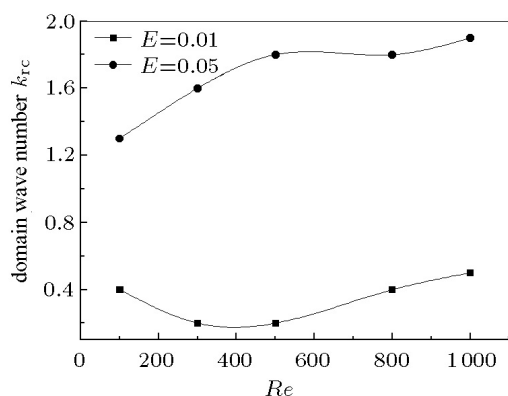
Fig.5 The variations of domain frequency of para-varicose mode with Re

对比图 4 和图 5 可以发现, 液体黏性对类对称模式和类反对称模式下圆环旋转液体射流特征频率具有不同的影响规律. 从图 5 中可以看到, 在类对称模式下, 当液体黏性较小时 (Re 较大时), 旋转强度较大的圆环旋转液体射流特征频率大于旋转强度较小的圆环旋转液体射流特征频率; 当液体黏性较大时 (Re 较小时), 旋转强度较大的圆环旋转液体射流特征频率小于旋转强度较小的圆环旋转液体射流特征频率. 当旋转强度较大时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类对称模式下圆环旋转液体射流特征频率迅速减小. 当旋转强度较小时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类对称模式下圆环旋转液体射流特征频率减小, 当液体黏性增加到一定值时 (Re 减小到一定值时), 类对称模式下圆环旋转液体射流特征频率基本保持不变.

3.3 液体雷诺数 Re 对不同旋转强度下圆环旋转黏性液体射流最不稳定波数的影响

最不稳定波数是射流不稳定性分析中的重要参数, 下面在类反对称模式与类对称模式下, 分析液体雷诺数 Re 对不同旋转强度的圆环旋转液体射流最不稳定波数的影响.

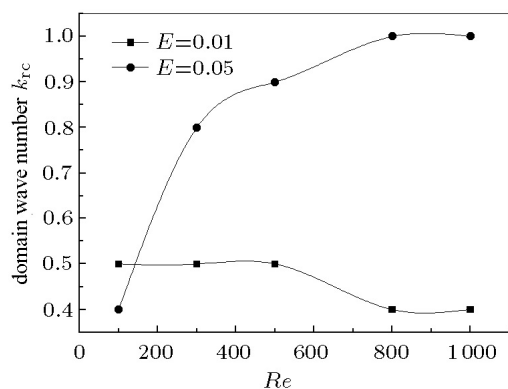
图 6 给出的是在如前所述参数条件下, 类反对称模式下, 不同旋转强度时, 最不稳定波数随 Re 的

图 6 类反对称模式下最不稳定性波数随射流液体雷诺数 Re 的变化Fig.6 The variations of the domain wave number of para-sinusoidal mode with Re

变化。

从图 6 中可以看到, 在类反对称模式下, 旋转强度较大的圆环旋转液体射流的最不稳定波数始终大于旋转强度较小的圆环旋转液体射流的最不稳定波数。当旋转强度较大时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定波数减小。当旋转强度较小时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定波数先减小, 当液体黏性增加到一定值时 (Re 减小到一定值时), 圆环旋转液体射流最不稳定波数出现增大的趋势。

图 7 给出的是在如前所述参数条件下, 类对称模式下, 不同旋转强度时, 最不稳定性波数随 Re 的变化。

图 7 类对称模式下最不稳定性波数随射流液体雷诺数 Re 的变化Fig.7 The variations of the domain wave number of para-varicose mode with Re

对比图 6 和图 7 可以发现, 液体黏性对类对称模式和类反对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定性波数具有不同的影响规律。从图 7 中可以看到, 在

类对称模式下, 当液体黏性较大 (Re 较小) 时, 旋转强度较小的圆环旋转液体射流的最不稳定波数小于旋转强度较大的圆环旋转液体射流的最不稳定波数。当旋转强度较大时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定波数减小。当旋转强度较小时, 随着液体黏性的增加, 亦即 Re 减小, 类反对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定波数增大, 当液体黏性增加到一定值时 (Re 减小到一定值时), 类对称模式下圆环旋转液体射流最不稳定波数基本保持不变。

4 结 论

在推导出的圆环旋转黏性液体射流色散方程的基础上, 本文进行了圆环旋转黏性液体射流的空间不稳定性研究, 针对中低速射流, 得到如下结论:

(1) 对于旋转强度较大的圆环旋转液体射流, 液体黏性的增加不利于其破碎。对于旋转强度较小的圆环旋转液体射流, 液体黏性的增加有利于其破碎。

(2) 对于旋转强度较大的圆环旋转液体射流, 随着液体黏性的增加, 射流特征频率减小。对于旋转强度较小的圆环旋转液体射流, 随着液体黏性的增加, 类反对称模式下的射流特征频率先减小后增大; 随着液体黏性的增加, 类对称模式下的射流特征频率增大。

(3) 对于旋转强度较大的圆环旋转液体射流, 随着液体黏性的增加, 射流最不稳定波数减小。对于旋转强度较小的圆环旋转液体射流, 随着液体黏性的增加, 类反对称模式下的射流最不稳定波数先减小后增大; 随着液体黏性的增加, 类对称模式下的射流最不稳定波数增大。

参 考 文 献

- 1 Ponstein J. Instability of rotating cylindrical jets. *Applied Scientific Research*, 1959, A8(1): 425-456
- 2 Ma Z. Investigation on the internal flow characteristics of pressure-swirl atomizer. [PhD Thesis]. Cincinnati: University of Cincinnati, 2001
- 3 Yule AJ, Chinn JJ. The Internal flow and exit conditions of pressure swirl atomizers. *Atomization and Sprays*, 2000, 10: 121-146
- 4 Nonnenmacher S, Piesche M. Design of hollow cone pressure swirl nozzle to atomize Newtonian fluids. *Chemical Engineering Science*, 2000, 55(19): 4339-4348
- 5 Ibrahim EA, McKinney TR. Injection characteristics of non-swirling and swirling annular liquid sheets. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*.

- Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, 220(2): 203-214
- 6 Xue J. Computational simulation of flow inside pressure-swirl atomizers. [PhD Thesis]. Cincinnati: University of Cincinnati, 2004
 - 7 Liao Y, Sakman AT, Jeng SM, et al. A comprehensive model to predict simplex atomizer performance. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1999, 121: 285-294
 - 8 Gavaises M, Arcoumanis C. Modelling of sprays from high pressure swirl atomizers. *International Journal of Engine Research*, 2001, 2(2): 95-117
 - 9 严春吉, 殷佩海, 解茂昭. 液体射流在旋转气流中的雾化机理研究. 内燃机学报, 2004, 22(5): 425-432 (Yan Chunji, Yin Peihai, Xie Maozhao. Mechanisms of atomization of a liquid jet surrounded by swirling airstreams. *Transactions of CSICE*, 2004, 22(5): 425-432 (in Chinese))
 - 10 林玉静. 旋流喷嘴射流及其破碎机理的研究. [博士论文]. 天津: 天津大学, 1999 (Lin Yujing. A study on a hollow swirling liquid jet and the mechanism of its breakup. [PhD Thesis]. Tianjin: Tianjin University, 1999 (in Chinese))
 - 11 Ibrahim AA. Comprehensive study of internal flow field and linear and nonlinear instability of an annular liquid sheet emanating from an atomizer. [PhD Thesis]. Cincinnati: University of Cincinnati, 2006
 - 12 Ibrahim AA, Jog MA. Effect of liquid and air swirl strength and relative rotational direction on the instability of an annular liquid sheet. *Acta Mechanica*, 2006, 186: 113-133
 - 13 Sekar J. The effect of liquid viscosity on the instability of a swirling annular liquid sheet. [Master Thesis]. Cincinnati: University of Cincinnati, 2005
 - 14 Lin SP. Breakup of Liquid Sheets and Jets. New York: Cambridge University Press, 2003
 - 15 胡国辉. 变密度旋流射流的线性稳定性分析. 水动力学研究与进展, 2005, 20(5): 624-628 (Hu Guohui. Linear stability analysis of variable density swirling jets. *Journal of Hydrodynamics*, 2005, 20(5): 624-628 (in Chinese))
 - 16 严春吉. 液体射流分裂雾化机理及内燃机缸内工作过程的模拟. [博士论文]. 大连: 大连海事大学, 2004 (Yan Chunji. Mechanisms of breakup and atomization of liquid jets and process simulation in cylinder of internal combustion engine. [PhD Thesis]. Dalian: Dalian Maritime University, 2004 (in Chinese))
 - 17 严春吉, 解茂昭. 空心圆柱形液体射流分裂与雾化机理的研究. 水动力学研究与进展, 2001, 16(2): 200-208 (Yan Chunji, Xie Maozhao. Regime of breakup and atomization of hollow cylindrical liquid jets. *Journal of Hydrodynamics*, 2001, 16(2): 200-208 (in Chinese))
 - 18 杜青. 受激液体射流破碎机理的研究. [博士论文]. 天津: 天津大学, 1998 (Du Qing. A study on the breakup of excited liquid jets. [PhD Thesis]. Tianjin: Tianjin University, 1998 (in Chinese))
 - 19 曹建明. 喷雾学. 北京: 机械工业出版社, 2005 (Cao Jianming. Study of Spray. Beijing: China Machine Press, 2005 (in Chinese))

DOI: 10.6052/0459-1879-11-197

(责任编辑: 周冬冬)

附 录

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{I_{m-1}(x)}{\lambda^2 - 2iERe} + \frac{I_{m+1}(x)}{\lambda^2 + 2iERe} \\
S_2(x) &= \frac{K_{m-1}(kB_h)}{\lambda^2 - 2iERe} + \frac{K_{m+1}(kB_h)}{\lambda^2 + 2iERe} \\
S_3(x) &= \frac{I'_{m-1}(x)}{\lambda^2 - 2iERe} + \frac{I'_{m+1}(x)}{\lambda^2 + 2iERe} \\
S_4(x) &= \frac{K'_{m-1}(x)}{\lambda^2 - 2iERe} + \frac{K'_{m+1}(x)}{\lambda^2 + 2iERe} \\
S_5(x) &= -\frac{2k^3 Re \lambda^2 I'_m(x)}{\lambda^4 + 4E^2 Re^2} \\
S_6(x) &= -\frac{2k^3 Re \lambda^2 K'_m(x)}{\lambda^4 + 4E^2 Re^2} \\
S_7(x) &= \frac{I'_{m+1}(x)}{\lambda^2 + 2iERe} - \frac{I'_{m-1}(x)}{\lambda^2 - 2iERe} \\
S_8(x) &= \frac{K'_{m+1}(x)}{\lambda^2 + 2iERe} - \frac{K'_{m-1}(x)}{\lambda^2 - 2iERe} \\
S_9(x) &= \frac{(m+1)I_{m+1}(kB_h)}{\lambda^2 + 2iERe} + \frac{(m-1)I_{m-1}(kB_h)}{\lambda^2 - 2iERe} \\
S_{10}(x) &= \frac{(m+1)K_{m+1}(kB_h)}{\lambda^2 + 2iERe} + \frac{(m-1)K_{m-1}(kB_h)}{\lambda^2 - 2iERe}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,5} &= -I_m(kB_h) - k^2 S_3(kB_h) \\
A_{2,6} &= -K_m(kB_h) + k^2 S_4(kB_h) \\
A_{2,8} &= K_m(kB_h) - \frac{kK'_m(kB_h)e^{-i\Phi}}{Q_o(kU_o + i\omega)^2} \cdot \\
&\quad \left(B_h E^2 - \frac{k^2}{We} - \frac{m^2 - 1}{B_h^2 We} \right) \\
A_{3,1} &= k^2 I_{m+1}(l_1 B_h) + l_1^2 I'_m(l_1 B_h) \\
A_{3,2} &= k^2 K_{m+1}(l_1 B_h) - l_1^2 K'_m(l_1 B_h) \\
A_{3,3} &= k^2 I_{m-1}(l_2 B_h) + l_2^2 I'_m(l_2 B_h) \\
A_{3,4} &= k^2 K_{m-1}(l_2 B_h) - l_2^2 K'_m(l_2 B_h) \\
A_{3,5} &= -k^3 Re S_1 + S_5(kB_h) \\
A_{3,6} &= k^3 Re S_2 + S_6(kB_h) \\
A_{4,1} &= (m+1)I_{m+1}(l_1 B_h) - B_h l_1 I'_{m+1}(l_1 B_h) \\
A_{4,2} &= (m+1)K_{m+1}(l_1 B_h) - B_h l_1 K'_{m+1}(l_1 B_h) \\
A_{4,3} &= (m-1)I_{m-1}(l_2 B_h) + B_h l_2 I'_{m-1}(l_2 B_h) \\
A_{4,4} &= (m-1)K_{m-1}(l_2 B_h) + B_h l_2 K'_{m-1}(l_2 B_h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{4,5} &= Re k^2 B_h S_7(k B_h) - k Re S_9(k B_h) & \Lambda_{7,3} &= k^2 I_{m-1}(l_2 A_h) + l_2^2 I'_m(l_2 A_h) \\
\Lambda_{4,6} &= -Re k^2 B_h S_8(k B_h) + k Re S_{10}(k B_h) & \Lambda_{7,4} &= k^2 K_{m+1}(l_2 A_h) - l_2^2 K'_m(l_2 A_h) \\
\Lambda_{5,5} &= -k Re S_1(k A_h) & \Lambda_{7,5} &= -k^3 Re S_1(k A_h) + S_5(k A_h) \\
\Lambda_{5,6} &= k Re S_2(k A_h) & \Lambda_{7,6} &= k^3 Re S_2(k A_h) + S_6(k A_h) \\
\Lambda_{6,5} &= -I_m(k A_h) - k^2 S_3(k A_h) & \Lambda_{8,1} &= (m+1) I_{m+1}(l_1 A_h) - A_h l_1 I'_{m+1}(l_1 A_h) \\
\Lambda_{6,6} &= -K_m(k A_h) + k^2 S_4(k A_h) & \Lambda_{8,2} &= (m+1) K_{m+1}(l_1 A_h) - A_h l_1 K'_{m+1}(l_1 A_h) \\
\Lambda_{6,7} &= I_m(k A_h) - \frac{k I'_m(k A_h)}{Q_i(k U_i + i\omega)^2} \cdot & \Lambda_{8,3} &= (m-1) I_{m-1}(l_2 A_h) + A_h l_2 I'_{m-1}(l_2 A_h) \\
&\quad \left(A_h E^2 + \frac{k^2}{We} - \frac{m^2 - 1}{A_h^2 We} \right) & \Lambda_{8,4} &= (m-1) K_{m-1}(l_2 A_h) + A_h l_2 K'_{m-1}(l_2 A_h) \\
\Lambda_{7,1} &= k^2 I_{m+1}(l_1 A_h) + l_1^2 I'_m(l_1 A_h) & \Lambda_{8,5} &= A_h k^2 Re S_7(k A_h) - k Re S_9(k A_h) \\
\Lambda_{7,2} &= k^2 I_{m+1}(l_1 A_h) - l_1^2 K'_m(l_1 A_h) & \Lambda_{8,6} &= -A_h k^2 Re S_8(k A_h) + k Re S_{10}(k A_h)
\end{aligned}$$

SPATIAL INSTABILITY ANALYSIS OF AN ANNULAR SWIRLING VISCOUS LIQUID JET¹⁾

Yan Kai²⁾ Ning Zhi Lü Ming

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract The effect of liquid viscosity on an annular swirling viscous liquid jet with different swirl strength values is studied with linear instability analysis. The spatial mode instability analysis for para-sinusoidal mode and para-varicose mode is carried out. An analytical form of dispersion relation is derived, which governs the disturbance growth for an annular swirling viscous liquid sheet with a solid vortex swirl velocity profile subjected to three-dimensional disturbances. The results show that, with higher swirl strength, the increase of viscosity hinders the breakup and makes the domain frequency and domain wave number smaller. However, at low swirl strength, the increase of viscosity speeds up the breakup, makes the domain frequency in the para-sinusoidal mode first decrease and then increase and makes the domain frequency in the para-varicose mode increase. Furthermore, at low swirl strength, the domain wave number in the para-sinusoidal mode first decreases and then increases, the domain wave number in the para-varicose mode increases with an increase in liquid viscosity.

Key words an annular swirling viscous liquid jet, solid vortex swirl profile, liquid viscosity, liquid swirl strength, spatial instability

Received 11 July 2011, revised 30 October 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (50876007) and Beijing Natural Science Foundation (3102024).

2) E-mail: yanqiaokai@gmail.com